Kapitel 10

Aufgabe 10.1

Eine Entscheidungsalternative *a* habe die folgenden möglichen finanziellen Konsequenzen (Kosten in €) und ihnen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten:

20.000	22.000	24.000	26.000
10%	25%	35%	30%

Eine zweite Alternative *b* kann die Konsequenzen 20.000 oder 24.000 € haben; beiden wird eine Wahrscheinlichkeit von 50% zugemessen.

(a) Zeichnen Sie die Risikoprofile von *a* und *b*.

(b) Können Sie sich für eine Alternative entscheiden?

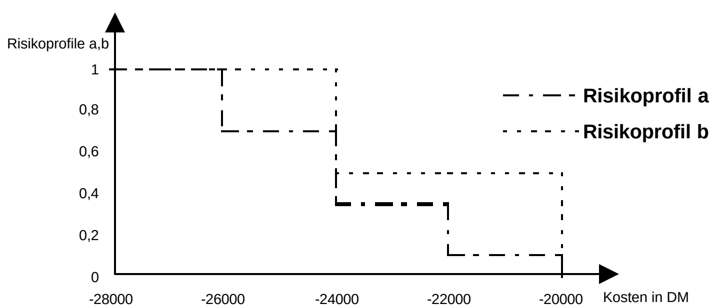
Lösung 10.1

a) Alternative a:

–20000	–22000	–24000	–26000
0,1	0,25	0,35	0,3

Alternative b:

–20000	–24000
0,5	0,5



(b) Ein Risikoprofl zeigt die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine bessere Ausprägung erreicht werden kann. Da das Risikoprofil von Alternative b über oder auf dem von Alternative a liegt, dominiert Alternative b Alternative a stochastisch.

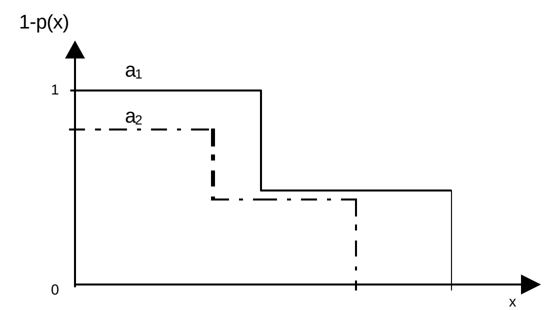
Aufgabe 10.2

(a) Geben Sie ein Beispiel für zwei Aktionen *a* und *b*, wobei die Aktion *a* die Aktion *b* stochastisch, aber nicht absolut dominiert.

(b) Kann man allein aus dem Vergleich zweier Risikoprofile auf absolute Dominanz schließen?

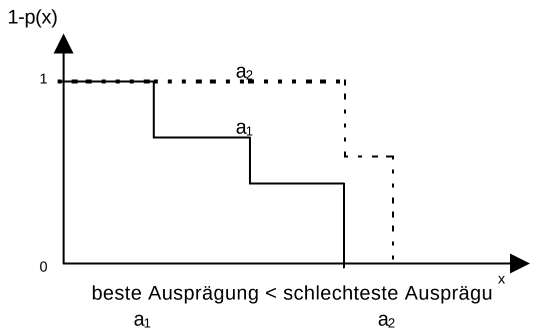
Lösung 10.2

(a)



stochastische Dominanz

(b)



Da die Ausprägung von Alternative a_1, die mit Sicherheit nicht mehr überschritten wird, niedriger liegt als die Ausprägung von Alternative a_2, die mit Sicherheit überschritten wird, kann auf absolute Dominanz von a_2 über a_1 geschlossen werden.

Aufgabe 10.3

Ein Unternehmen hat zwischen drei Investitionen *a*, *b* und *c* zu wählen. Die Kapitalwerte der Projekte hängen von der wirtschaftlichen Entwicklung ab und sind für die drei als möglich angesehenen Szenarien in der Tabelle angegeben (in Millionen €).

	s_1	s_2	s_3
a	10	15	5
b	5	5	20
c	2	10	15

Für die Wahrscheinlichkeiten der drei Entwicklungen liegen nur ungefähre Angaben vor. Es gilt $0{,}1 \leq p(s_1) \leq 0{,}3$, $0{,}2 \leq p(s_2) \leq 0{,}3$ und $0{,}3 \leq p(s_3) \leq 0{,}5$. Das Unternehmen strebt einen maximalen erwarteten Kapitalwert an. Kann mit den gegebenen Wahrscheinlichkeitsintervallen schon eine Entscheidung herbeigeführt werden?

Lösung 10.3

Wahrscheinlichkeitsintervalle:

	s_1	s_2	s_3
Max	0,3	0,3	0,5
Min	0,1	0,2	0,3

Alternativen:

a	10	15	5
b	5	5	20
c	2	10	15

Durchführung paarweiser Dominanztests:

<u>1. Dominiert a b?</u>

Errechnen der Differenzen der Konsequenzen:
s_1: 10 – 5 = 5
s_2: 15 – 5 = 10
s_3: 5 – 20 = –15

Bildung des Erwartungswerts der Differenz:
$p(s_1) \cdot 5 + p(s_2) \cdot 10 + p(s_3) \cdot (-15) \rightarrow \min!$

Wenn Ergebnis > 0, dann Dominanz von a oder b.

(1) Für positive Koeffizienten Einsetzen des Min-Wertes, für negative Koeffizienten Einsetzen des Max-Wertes:
$0{,}1 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot (-15)$

(2) Da 0,1 + 0,2 + 0,5 < 1 muß eine Korrektur erfolgen. Verändere zunächst die Wahrscheinlichkeit der kleinsten Differenz:
$0{,}5 \cdot (-15)$
$0{,}2 \cdot 10$
$0{,}1 \cdot 5$ kleinster Wert! $\rightarrow 0{,}3 \cdot 5$

$0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}5 = 1$ $\quad\rightarrow$ zulässige Lösung
$0{,}3 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot (-15) = -4 < 0$

$\Rightarrow$ a dominiert b nicht!

2. Dominiert b a?

Vorgehensweise analog zu 1.

$p(s_1) \cdot (-5) + p(s_2) \cdot (-10) + p(s_3) \cdot 15$ wird zu

$0{,}3 \cdot (-5) \quad + \quad 0{,}3 \cdot (-10) \quad + \quad 0{,}3 \cdot 15$
geht nicht   geht nicht   wird geändert

$0{,}3 \cdot (-5) + 0{,}3 \cdot (-10) + 0{,}4 \cdot 15 = 1{,}5 > 0$

$\Rightarrow$ b dominiert a!

3. Dominiert b c?

$p(s_1) \cdot 3 + p(s_2) \cdot (-5) + p(s_3) \cdot 5$ wird zu

$0{,}1 \cdot 3 \quad + \quad 0{,}3 \cdot (-5) \quad + \quad 0{,}3 \cdot 5$
Korrektur   geht nicht   Korrektur

$0{,}3 \cdot 3 + 0{,}3 \cdot (-5) + 0{,}4 \cdot 5 = 1{,}4 > 0$

$\Rightarrow$ b dominiert c!

Da b sowohl die Alternative a, als auch die Alternative c dominiert, ist b zu wählen.

Aufgabe 10.4

Spekulant Schlotter steht vor der Wahl zwischen drei Anlagealternativen, die in Abhängigkeit von dem zukünftigen Umweltzustand zu den in der Tabelle angegebenen Vermögenspositionen führen (in Millionen €). Schlotter weiß von seiner Nutzenfunktion nur, daß sie mit steigendem Vermögen zunimmt.

	s_1	s_2	s_3
a	4	2	1
b	1	2	5
c	4	2	5

(a) In welche Rangfolge muß ein im Sinne der Risikonutzentheorie rationaler Spekulant die drei Alternativen bringen?
(b) Angenommen, daß die Alternative *c* nicht mehr zur Verfügung steht. Schlotter entschließt sich zu *b*, worauf der Umweltzustand s_1 eintritt. Ein Freund wirft ihm vor, sich falsch entschieden zu haben, da ja Alternative *a* ein höheres Vermögen eingebracht hätte. Was halten Sie von diesem Vorwurf?

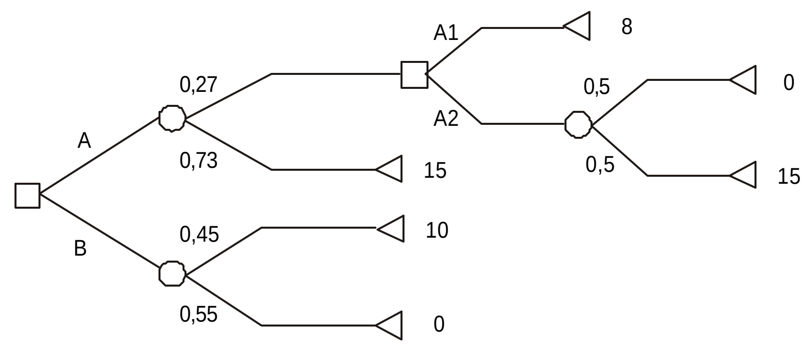
Lösung 10.4

(a) c dominiert a und b bzgl. der Zustände.

(b) Da weder a b noch b a absolut dominiert, hängt die Entscheidung von den Nutzenerwartungswerten von a und b ab. Zwar ist der grobe Verlauf der Nutzenfunktion gegeben, Angaben in bezug auf die Wahrscheinlichkeiten fehlen aber. Somit konnte keine Präferenzaussage für a und b getroffen werden. Der Vorwurf einer falsch (nicht rational) getroffenen Entscheidung ist daher unbegründet.

Aufgabe 10.5

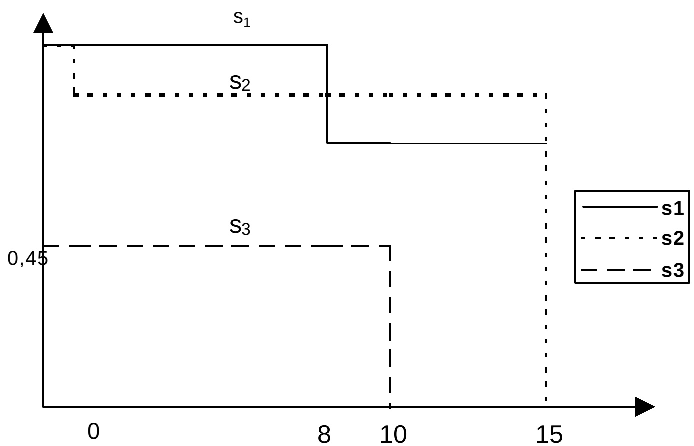
Berechnen Sie die Risikoprofile der drei in folgendem Entscheidungsbaum möglichen Strategien. Wird eine Strategie stochastisch dominiert?



Lösung 10.5

Die drei möglichen Strategien sind:

s_1	$A \rightarrow A_1$
s_2	$A \rightarrow A_2$
s_3	B



Strategie s_3 wird von den Strategien s_2 und s_1 stochastisch dominiert. Da sich die Risikoprofile von s_2 und s_1 schneiden, kann zwischen diesen keine stochastische Dominanz bestehen.

Aufgabe 10.6

Ein Produzent mit der Nutzenfunktion $u(x) = \sqrt{x} / 30$ muß sich zwischen drei Investitionsalternativen (a, b, c) entscheiden. Die möglichen Ergebnisse (Kapitalwert in Tausend €) hängen davon ab, ob ein bestimmter wichtiger Lieferant von der Konkurrenz aufgekauft wird oder nicht.

	Lieferant wird nicht aufgekauft	Lieferant wird aufgekauft
a	818	676
b	676	900
c	784	784

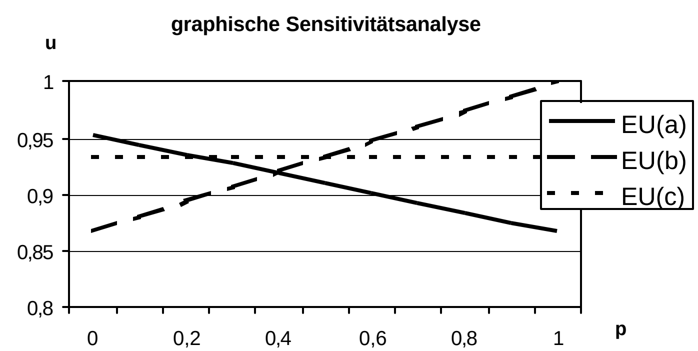
Führen Sie eine graphische Sensitivitätsanalyse bezüglich der Wahrscheinlichkeit p, daß der Lieferant aufgekauft wird, durch und ermitteln Sie die kritischen Wahrscheinlichkeitswerte.

Lösung 10.6

Zunächst werden die Geradengleichungen für die Alternativen in Abhängigkeit von p bzw. 1–p berechnet:

$EU(a) = (1-p) \cdot u(818) + p \cdot u(676) = 0{,}953 - 0{,}953p + 0{,}867p = 0{,}953 - 0{,}086p$

analog: $EU(b) = 0{,}867 + 0{,}133p$; $EU(c) = 0{,}933$



Berechnung der Schnittstellen:
$EU(a) = EU(c) \Rightarrow 0{,}953 - 0{,}086p = 0{,}933 \Rightarrow p = 0{,}233$
$EU(b) = EU(c) \Rightarrow 0{,}867 + 0{,}133p = 0{,}933 \Rightarrow p = 0{,}496$

Im Intervall $0 \leq p \leq 0{,}233$ ist Alternative a optimal,
im Intervall $0{,}233 \leq p \leq 0{,}496$ ist Alternative c optimal und
im Intervall $0{,}496 \leq p \leq 1$ ist Alternative b optimal.

Aufgabe 10.7

Das Multimedia-Unternehmen Omnismart will im Foyer seines Betriebs eine repräsentative Ausstellung aufbauen. Man holt sich von mehreren Firmen, die Einrichtungen und Messestände entwerfen und gestalten, Angebote ein. In die engere Wahl kommen zwei Unternehmen, mit denen man schon einige Erfahrungen gemacht hat, die Kleinholz Design GmbH und die Schlimm & Schluder OHG.

Da die Qualität der Entwürfe und der Ausführung bei beiden Unternehmen etwa gleich gut sein dürfte, will der Geschäftsführer von Omnismart, Xaver Packmers, die Auswahl vor allem auf zwei Kriterien gründen: den Kosten und dem Zeitbedarf für das Projekt. Je eher die Ausstellung eröffnet werden kann, desto größer wird der Effekt bei Kunden und Interessenten sein.

Die Angebote beider Firmen enthalten Angaben über die Kosten und die Dauer. Packmers rechnet jedoch damit, daß beträchtliche Abweichungen eintreten können, und überlegt sich subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Kosten und Projektdauern.

Kleinholz Design

Erforderliche Dauer		Kosten in €	
6 Wochen	15%	30.000	25%
7 Wochen	35%	40.000	50%
8 Wochen	35%	50.000	25%
9 Wochen	15%		

Schlimm & Schluder

Erforderliche Dauer		Kosten in €	
5 Wochen	20%	50.000	20%
6 Wochen	60%	55.000	50%
7 Wochen	20%	60.000	30%

Zur Bewertung der beiden Angebote möchte Packmers eine additive Nutzenfunktion heranziehen. Zur Prüfung auf additive Nutzenunabhängigkeit stellt er sich folgende fiktiven Lotterien vor:

(1) Mit 50% Wahrscheinlichkeit 5 Wochen, 60.000 €,
mit 50 % Wahrscheinlichkeit 9 Wochen, 30.000 €.

(2) Mit 50% Wahrscheinlichkeit 5 Wochen, 30.000 €,
mit 50% Wahrscheinlichkeit 9 Wochen, 60.000 €.

Er kommt zu dem Resultat, daß er zwischen diesen Lotterien ziemlich indifferent ist.

Die eindimensionale Nutzenfunktion über den Kosten (x_1), die Packmers als nächstes bestimmt, verläuft konkav über dem Intervall [30, 60] und kann durch die Funktion

$$u(x_1) = 1 - \frac{e^{0,9} - e^{0,03x_1}}{e^{0,9} - e^{1,8}}$$

angenähert werden. Die eindimensionale Nutzenfunktion über der Projektdauer (x_2) verläuft linear fallend von 5 bis 9 Wochen. Die Gewichtungsfaktoren bestimmt Packmers mit $k_K = 0,65$ und $k_D = 0,35$.

(a) Welche Firma wird den Auftrag erhalten?

(b) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse durch, die zeigt, wie die Entscheidung von den Attributgewichten abhängt.

Lösung 10.7

(a)

Additive Nutzenunabhängigkeit ist gegeben, da Packmers einigermaßen indifferent zwischen den Lotterien 1 und 2 ist. Die Verteilung der Attributkombinationen spielt für Packmers somit keine Rolle.

Gemäß der Gleichung 10.14 kann der erwartete Nutzen einer Alternative a geschrieben werden als

$$EU(a) = k_K \cdot \sum_i p_i u_K(a_{iK}) + k_D \cdot \sum_i q_i u_D(a_{iD})$$

mit

k_K, k_D	Gewichtungsfaktoren der Attribute Kosten bzw. Dauer
p_i	Wahrscheinlichkeit der i-ten Kostenausprägung
q_i	Wahrscheinlichkeit der i-ten Dauerausprägung
u_K, u_D	Einzelnutzenfunktionen der Attribute Kosten bzw. Dauer.

Eindimensionale Nutzenfunktion über die Kosten (x_1):

$$u_1(x_1) = 1 - \frac{e^{0,9} - e^{0,03x_1}}{e^{0,9} - e^{1,8}}$$

Die eindimensionale Nutzenfunktion über die Projektdauer (x_2) verläuft linear fallend über das Intervall [5 Wochen; 9 Wochen]:

$$u_2(x_2) = mx_2 + b \qquad (0)$$

$$u_2(5) = 1 \Rightarrow 1 = m \cdot 5 + b \qquad (1)$$

$$u_2(9) = 0 \Rightarrow 0 = m \cdot 9 + b \Leftrightarrow b = -9m \qquad (2)$$

(2) in (1):

$$1 = 5m - 9m = -4m \Leftrightarrow m = -0,25 \qquad (3)$$

(3) in (2):
$b = -9 \cdot (-0{,}25) = 2{,}25 \qquad (4)$
(3) u. (4) in (0):
$u_2(x_2) = -0{,}25 \cdot x_2 + 2{,}25$

$$EU(a) = 0{,}65 \cdot [\sum_i p_i (1 - \frac{e^{0,9} - e^{0,03 \cdot a_{i1}}}{e^{0,9} - e^{1,8}})] + 0{,}35 \cdot [\sum_i p_i (-0{,}25 \cdot a_{i2} + 2{,}25)]$$

EU(Kleinholz Design)
$= 0{,}65 \cdot [0{,}25 \cdot u_K(30) + 0{,}5 \cdot u_K(40) + 0{,}25 \cdot u_K(50)]$
$\quad + 0{,}35 \cdot [0{,}15 \cdot u_D(6) + 0{,}35 \cdot u_D(7) + 0{,}35 \cdot u_D(8) + 0{,}15 \cdot u_D(9)]$
$= 0{,}65 \cdot [0{,}25 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}7603 + 0{,}25 \cdot 0{,}4368]$
$\quad + 0{,}35 \cdot [0{,}15 \cdot 0{,}75 + 0{,}35 \cdot 0{,}5 + 0{,}35 \cdot 0{,}25 + 0{,}15 \cdot 0]$
$= 0{,}65 \cdot 0{,}7393 + 0{,}35 \cdot 0{,}375$
$= 0{,}6118$

EU(Schlimm & Schluder)
$= 0{,}65 \cdot [0{,}2 \cdot u_K(50) + 0{,}5 \cdot u_K(55) + 0{,}3 \cdot u_K(60)] + 0{,}35 \cdot [0{,}2 \cdot u_D(5) + 0{,}6 \cdot u_D(6) + 0{,}2 \cdot u_D(7)]$
$= 0{,}65 \cdot [0{,}2 \cdot 0{,}4368 + 0{,}5 \cdot 0{,}2347 + 0{,}3 \cdot 0] + 0{,}35 \cdot [0{,}2 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}5]$
$= 0{,}65 \cdot 0{,}2047 + 0{,}35 \cdot 0{,}75$
$= 0{,}3956$

Kleinholz Design erhält den Auftrag.

(b) Sensitivitätsanalyse

Es gilt:
$k_K + k_D = 1 \Leftrightarrow k_D = 1 - k_K$

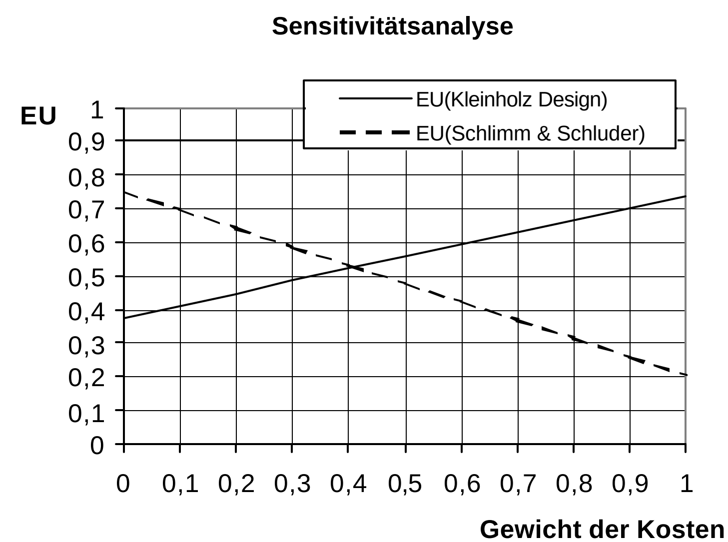
EU(Kleinholz Design) $= k_K \cdot 0{,}7393 + (1 - k_K) \cdot 0{,}375$
$= 0{,}7393 \cdot k_K + 0{,}375 - 0{,}375 \cdot k_K = 0{,}3643 \cdot k_K + 0{,}375$

EU(Schlimm & Schluder) $= k_K \cdot 0{,}2047 + (1 - k_K) \cdot 0{,}75$
$= 02047 \cdot k_K + 0{,}75 - 0{,}75 \cdot k_K = -0{,}5453 \cdot k_K + 0{,}75$

EU(Kleinholz Design) $= EU$(Schlimm & Schluder)
$\Rightarrow 0{,}3643 \cdot k_K + 0{,}375 = -0{,}5453 \cdot k_K + 0{,}75$
$\Leftrightarrow 0{,}9094 \cdot k_K = 0{,}375$
$\Leftrightarrow k_K = 0{,}4124$

Solange $k_K > 0{,}4124$ ist, wird Kleinholz Design vorgezogen!

Bei Variation von k_K und $k_D = 1 - k_K$ ergibt sich folgender Verlauf der Nutzenerwartungswerte:



Aufgabe 10.8

Doll und Dösig, zwei unverbrüchliche Freunde, planen, ihren Lebensstandard im Alter durch Investition in Aktienfonds aufzubessern. Sie haben jeder 50.000 € flüssig und wollen die Investition gemeinsam tätigen.

Außer der Wahl der passenden Fonds ist auch eine Entscheidung darüber zu treffen, wie der spätere Wertzuwachs zwischen ihnen aufgeteilt werden soll. Neben der offensichtlichen Lösung, den Gewinn gleichmäßig zu teilen, kommt die Idee auf, daß nur einer von ihnen – durch Münzwurf zu bestimmen – den ganzen Gewinn erhalten soll. Der Verlierer soll von dem Gewinner lediglich seine Einlage von 50.000 zurückbekommen. Der Gedanke dahinter ist, daß der zu erwartende Gewinn – sie rechnen mit maximal 50% – nicht groß genug ist, um für beide von ihnen eine wirklich tolle Verschönerung ihres Lebensabends zu bewirken.

Versetzen Sie sich in die Lage von Doll (oder von Dösig). Es geht Ihnen zwar um Ihr eigenes Wohl, aber das Schicksal Ihres Kumpels ist Ihnen auch nicht gleichgültig. Daher möchten Sie bei der Bewertung der Alternativen nicht nur Ihre eigenen Gewinne (x_1), sondern auch die Ihres Partners (x_2) berücksichtigen.

(a) Prüfen Sie anhand eines geeigneten Lotterievergleichs, ob ein additives Nutzenmodell für Sie angemessen ist.

(b) Falls die Antwort zu (a) Nein lautet: Woran liegt das? Können Sie durch eine Redefinition der Attribute die Bedingung für eine additive Nutzenfunktion herstellen?

Lösung 10.8

(a) Ein additives Nutzenmodell setzt additive Nutzenunabhängigkeit voraus, d.h. der Entscheider (Doll) müßte z.B. indifferent sein zwischen den folgenden fiktiven Lotterien A und B:

	0,5	0,5
A	Doll erhält 100.000 €, Dösig 50.000 €	Doll erhält 50.000 €, Dösig 100.000 €
B	Doll erhält 100.000 €, Dösig 100.000 €	Doll erhält 50.000 €, Dösig 50.000 €

(b) Falls Doll keine additive Nutzenunabhängigkeit zwischen x_1 und x_2 empfindet, könnte das folgenden Grund haben:

Falls A ─ B, empfindet Doll die ungleiche Verteilung der Gewinne als ungerecht. Falls A ™ B, empfindet er eine besondere Abneigung gegen die Möglichkeit eines sehr schlechten Ergebnisses (beide erhalten wenig).

Angenommen, es gilt A ─ B. Doll ist also auch auf eine gleichmäßige, „gerechte“ Verteilung bedacht. Er zieht B vor, weil dort mit Sicherheit beide den gleichen Betrag erhalten und seine eigene Gewinnerwartung bei beiden Lotterien die gleiche ist.

Den Wunsch nach Gleichverteilung der Gewinne zwischen den Partnern könnte Doll dadurch modellieren, daß er anstelle von x_2 eine neue Variable x_3 einführt, die das Ausmaß der Gerechtigkeit bzw. Ungerechtigkeit widerspiegelt. Für die Gültigkeit eines additiven Modells $u(x_1, x_3) = k_1 u_1(x_1) + (1-k_1)\, u_3(x_3)$ müßte er indifferent sein zwischen zwei fiktiven Lotterien

	0,5	0,5
A	Doll erhält hohen Gewinn; Verteilung sehr ungerecht	Doll erhält geringen Gewinn; Verteilung sehr gerecht
B	Doll erhält hohen Gewinn; Verteilung sehr gerecht	Doll erhält geringen Gewinn; Verteilung sehr ungerecht

Beispielsweise könnte er das Ausmaß der Ungerechtigkeit durch den absoluten Unterschied zwischen x_1 und x_2 messen: $x_3 = | x_1 - x_2 |$.

Dann würde additive Nutzenunabhängigkeit Indifferenz zwischen folgenden Lotterien erfordern:

	0,5	0,5
A	Doll erhält 100, Dösig 50 Ungerechtigkeit: 50	Doll erhält 50, Dösig 50 Ungerechtigkeit: 0
B	Doll erhält 100, Dösig 100 Ungerechtigkeit: 0	Doll erhält 50, Dösig 100 Ungerechtigkeit: 50

Wieder ist die eigene Gewinnerwartung für Doll bei A und B die gleiche. Beide Lotterien enthalten aber eine je 50%-Chance für eine gerechte und eine ungerechte Verteilung. Dies könnte dazu führen, daß Doll zwischen A und B indifferent ist. Es würde auf additive Nutzenunabhängigkeit zwischen x_1 und x_3 hindeuten.

Aufgabe 10.9

Eine Gemeinde will ein Obdachlosenasyl einrichten und zieht zur Auswahl zwischen verschiedenen Vorschlägen drei Kriterien heran: (X_1) Die erforderlichen monatlichen Zuschüsse, (X_2) die Anzahl der neugeschaffenen Arbeitsplätze und (X_3) die Anzahl der Übernachtungen. Alle drei Größen sind mit Unsicherheit behaftet.

Die Prüfung ergab bei dem Gemeinderat wechselseitige Nutzenunabhängigkeit der Attribute. Die drei eindimensionalen Nutzenfunktionen werden als linear identifiziert und über den Ausprägungsintervallen

(1) 100-150 Tausend € (Zuschuß pro Monat)
(2) 8-12 (neue Arbeitsplätze)
(3) 400-650 (Übernachtungen pro Monat).

Natürlich sinkt die Nutzenfunktion der Zuschüsse bei steigenden Zuschüssen, während die beiden anderen Nutzenfunktionen mit der Zahl der Abeitsplätze bzw. Übernachtungen steigen.

(a) Stellen Sie die Gleichungen der drei auf [0, 1] normierten eindimensionalen Nutzenfunktionen $u_r(x_r)$ auf.

(b) Der Gemeinderat ist indifferent zwischen einer sicheren Alternative (x_1 = 150, x_2 = 8, x_3 = 650) und der BRL [0,35, (x_1 = 100, x_2 = 12, x_3 = 650); 0,65, (x_1 = 150, x_2 = 8, x_3 = 400)].

Wie hoch ist das Gewicht k_3?

Ferner trifft der Gemeinderat folgende Indifferenzaussagen:

(150, 10, 400) ~ (100, 8, 400)
(150, 8, 500) ~ (100, 8, 400)

Bestimmen Sie k_1 und k_2.
Ermitteln Sie den Faktor k und stellen Sie die multiattributive Nutzenfunktion auf.

Lösung 10.9

(a) $u_1(x_1) = (150 - x_1)/50$, $u_2(x_2) = (x_2 - 8)/4$, $u_3(x_{31}) = (x_3 - 400)/250$

(b) u(150, 8, 650) = $k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 + k_3 \cdot 1 = k_3$ $\Rightarrow$ k_3 = u(BRL)

Die Summe der k_i muß nicht 1 ergeben (und man sieht ja später auch, daß es in diesem Beispiel nicht so ist).
Daß der Nutzen der optimalen Alternative (100, 12, 650) gerade 1 ist, liegt einfach daran, daß der Skalierungsfaktor k so gewählt wird, daß die multiattributive Nutzenfunktion genormt wird.
(Schauen Sie sich die Definitionsgleichung von k an. Sie sagt nichts anderes aus als: Füge bei der Nutzenberechnung noch einen Faktor k derart dazu, daß die bestmögliche Alternative gerade den Nutzen 1 erhält.)
Daß für die vorgegebene Basisreferenzlotterie der Nutzen 0,35 ist, liegt also an der Normierung und nicht an der Eigenschaft, daß die Summe der k_i gerade 1 wäre.

Anm. für besonders Interessierte: In dieser Hinsicht ist auch die oben stehende Berechnung u(150, 8, 650) = $k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 + k_3 \cdot 1 = k_3$ sehr mißverständlich bzw. falsch. Korrekt gilt:

$$u(150, 8, 650) = \frac{[k \cdot k_1 \cdot 0 + 1] \cdot [k \cdot k_2 \cdot 0 + 1] \cdot [k \cdot k_3 \cdot 1 + 1] - 1}{k}$$

Wenn man diesen Term ausrechnet, bleibt gerade k_3 stehen. Dies ist aber nur deshalb so, weil zwei der drei Faktoren wegfallen.

Aus den Indifferenzaussagen ergibt sich:

$0{,}5 \cdot k_2 = 1 \cdot k_1$ und
$0{,}4 \cdot k_3 = 1 \cdot k_1$

$\Rightarrow$ $k_1 = 0{,}4 \cdot 0{,}35 = 0{,}14$ $\quad k_2 = k_1 / 0{,}5 = 0{,}14 / 0{,}5 = 0{,}28$

Aus Iteration ergibt sich: $k \approx 1{,}14$

$$\Rightarrow \quad u(x_1, x_2, x_3) = \frac{\prod_{i=1}^{3} (1 + 1{,}14 k_i u_i x_i)) - 1}{1{,}14}$$

Aufgabe 10.10

Geschäftsführer Packmers (aus Aufgabe 10.7) hat wieder einen Auftrag zu vergeben. Es geht um ein ähnliches Problem. Diesmal jedoch kommt es ihm nicht nur auf die Dauer bis zur Fertigstellung und die Kosten an, sondern auch auf die zu erwartenden Besucherzahlen.

Es liegen zwei Angebote, A und B, vor. Bei A wird eine Projektdauer von 40 Tagen und ein Preis von 50.000 € angeboten, bei B eine Dauer von 50 Tagen und ein Preis von 54.000 €. Beide Anbieter legen sich jedoch nicht vertraglich auf die Einhaltung dieser Zahlen fest. Packmers hält bei A eine Dauer von 48 Tagen und Kosten von 55.000 € für realistisch, bei B eine Dauer von 55 Tagen und Kosten von 60.000 €.

Bei der Schätzung der Besucherzahlen berücksichtigt Packmers einerseits, daß infolge der längeren Fertigstellungsdauer bei B weniger Besucher kommen, andererseits B aber auch etwas bessere Arbeit liefert, was die Besucherzahlen erhöht. Er schätzt eine Besucherzahl von 3.000 für A und von 3.000 für B.

Zur Bewertung der beiden Angebote stellt er eine additive Funktion auf. Die Zahlen stehen in folgender Tabelle.

Attribut	Wertbereich	Verlauf	Gewicht
Dauer	40 bis 60 Tage	Linear fallend	0,2
Besucherzahl	2.000 bis 7.000	Linear steigend	0,5
Kosten	50.000 bis 70.000	Linear fallend	0,3

(a) Bewerten Sie die beiden Angebote.

Danach wird Packmers klar, daß die Schätzungen erhebliche Unsicherheiten enthalten. Er versucht, diese in folgenden Tabellen darzustellen.

Angebot A					
Dauer (Tage)	Wahrscheinlichkeit	Besucher	Bedingte Wahrschein-lichkeit	Kosten (€)	Wahrschein-lichkeit
40	1/3	4.500	1/2	50.000	1/3
		4.000	1/2	55.000	1/3
50	1/3	3.500	1/2	70.000	1/3
		3.000	1/2		
60	1/3	2.500	1/2		
		2.000	1/2		

Angebot B					
Dauer (Tage)	Wahrscheinlichkeit	Besucher	Bedingte Wahrschein-lichkeit	Kosten (€)	Wahrschein-lichkeit
50	1/4	5.000	1/2	55.000	1/4
		4.500	1/2	60.000	1/2
55	1/2	4.000	1/2	65.000	1/4
		3.500	1/2		
60	1/4	3.000	1/2		
		2.500	1/2		

Packmers will die bereits aufgestellte Wertfunktion in eine Nutzenfunktion transformieren. Dazu stellt er sich eine Lotterie über der Besucherzahl vor, bei der mit je 50% Wahrscheinlichkeit 2.000 oder 7.000 Besucher eintreffen werden. Sein Sicherheitsäquivalent zu dieser Lotterie legt er auf 3.900 Besucher fest.

(b) Stellen Sie die Nutzenfunktion auf. Wenn Sie Lust und ein Tabellenkalkulationsprogramm haben, ermitteln Sie die optimale Alternative.

Lösung 10.10

(a)

x_1: Dauer $w_1 = 0{,}2$
x_2: Besucherzahl $w_2 = 0{,}5$
x_3: Kosten in 1.000 € $w_3 = 0{,}3$

Ermittlung der Einzelwertfunktionen:

(1) $v_1(x_1) = m \cdot x_1 + b$ (0)

$v_1(40) = 1 \Rightarrow 1 = m \cdot 40 + b$ (1)

$v_1(60) = 0 \Rightarrow 0 = m \cdot 60 + b \Leftrightarrow b = -60 \cdot m$ (2)

(2) in (1):

$1 = m \cdot 40 - m \cdot 60 = -20 \cdot m \Leftrightarrow m = -0{,}05$ (3)

(3) in (2):

$b = -60 \cdot (-0{,}05) = 3$ (4)

(3) u. (4) in (0):

$v_1(x_1) = -0{,}05 \cdot x_1 + 3$

(2) analog zu (1) ergibt sich:

$v_2(x_2) = 0{,}0002 \cdot x_2 - 0{,}4$

(3) analog zu (1) ergibt sich:

$v_3(x_3) = -0{,}05 \cdot x_3 + 3{,}5$

Gesamtwertfunktion:

$$v(a) = 0{,}2 \cdot v_1(x_1) + 0{,}5 \cdot v_2(x_2) + 0{,}3 \cdot v_3(x_3)$$

$$\begin{aligned} v(\mathrm{A}) &= 0{,}2 \cdot v_1(48) + 0{,}5 \cdot v_2(3.000) + 0{,}3 \cdot v_3(55) \\ &= 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}75 \\ &= 0{,}12 + 0{,}1 + 0{,}225 \\ &= 0{,}445 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\mathrm{B}) &= 0{,}2 \cdot v_1(55) + 0{,}5 \cdot v_2(3.000) + 0{,}3 \cdot v_3(60) \\ &= 0{,}2 \cdot 0{,}25 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \\ &= 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}15 \\ &= 0{,}3 \end{aligned}$$

Packmers bewertet das Angebot A mit einem Wert von 0,445 höher als das Angebot B mit einem Wert von 0,3.

(b)

Eine additive multiattributive Wertfunktion kann gemäß Gleichung 10.20 in eine exponentielle Nutzenfunktion transformiert werden. Zu bestimmen ist der Parameter c. Halten wir die Attribute Dauer und Kosten auf ihrem schlechtesten Wert fest, so ist $v(x) = w_2\ v_2(x_2)$. Packmers gibt 3.900 Besucher als Sicherheitsäquivalent einer 50-50-Lotterie zwischen 2.000 Besuchern ($v(x_2 = 2.000) = 0$) und 7.000 Besuchern ($v(x_2 = 7.000) = w_2$) an. Der Wert des Sicherheitsäquivalents ist $v(x_2 = 3.900) = w_2\ v_2(3.900) = 0{,}5 \cdot 0{,}38 = 0{,}19$. Der Nutzen des Sicherheitsäquivalents ist gleich dem der Lotterie, nämlich $0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$. Da der Nutzen größer ist als der Wert, gilt Gleichung 10.20 in der Form (a). Normiert auf null bis eins lautet sie

$$0{,}25 = \frac{1-e^{0{,}19c}}{1-e^{c}} \quad mit\ c < 0.$$

Hieraus ermittelt man durch Probieren (Tabellenkalkulation) einen Wert von $c = -0{,}73$. Somit lautet die Nutzenfunktion

$$u(x) = \frac{1-e^{-0{,}73v(x)}}{1-e^{-0{,}73}}.$$

Nun sind für die je 18 möglichen Konsequenzen von Angebot A und B die Werte auszurechnen und daraus mittels der Formel die Nutzen zu bestimmen. Durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten mit den Nutzen ergeben sich die Nutzenerwartungswerte der beiden Angebote.

Dauer	Wskt	Besucher	Wskt	Kosten	Wskt	Wert	Wskt (p)	Nutzen (u)	p u
A									
40	0,333	4500	0,500	50	0,333	0,750	0,056	0,814	0,045
40	0,333	4500	0,500	55	0,333	0,675	0,056	0,751	0,042
40	0,333	4500	0,500	70	0,333	0,450	0,056	0,540	0,030
40	0,333	4000	0,500	50	0,333	0,700	0,056	0,772	0,043
40	0,333	4000	0,500	55	0,333	0,625	0,056	0,707	0,039
40	0,333	4000	0,500	70	0,333	0,400	0,056	0,489	0,027
50	0,333	4500	0,500	50	0,333	0,650	0,056	0,729	0,041
50	0,333	4500	0,500	55	0,333	0,575	0,056	0,662	0,037
50	0,333	4500	0,500	70	0,333	0,350	0,056	0,435	0,024
50	0,333	4000	0,500	50	0,333	0,600	0,056	0,685	0,038
50	0,333	4000	0,500	55	0,333	0,525	0,056	0,614	0,034
50	0,333	4000	0,500	70	0,333	0,300	0,056	0,380	0,021
60	0,333	4500	0,500	50	0,333	0,550	0,056	0,638	0,035
60	0,333	4500	0,500	55	0,333	0,475	0,056	0,566	0,031
60	0,333	4500	0,500	70	0,333	0,250	0,056	0,322	0,018
60	0,333	4000	0,500	50	0,333	0,500	0,056	0,590	0,033
60	0,333	4000	0,500	55	0,333	0,425	0,056	0,515	0,029
60	0,333	4000	0,500	70	0,333	0,200	0,056	0,262	0,015
									0,582
B									
50	0,250	5000	0,500	55	0,250	0,625	0,031	0,707	0,022
50	0,250	5000	0,500	60	0,500	0,550	0,063	0,638	0,040
50	0,250	5000	0,500	65	0,250	0,475	0,031	0,566	0,018
50	0,250	4500	0,500	55	0,250	0,575	0,031	0,662	0,021
50	0,250	4500	0,500	60	0,500	0,500	0,063	0,590	0,037
50	0,250	4500	0,500	65	0,250	0,425	0,031	0,515	0,016
55	0,250	5000	0,500	55	0,250	0,575	0,031	0,662	0,021
55	0,250	5000	0,500	60	0,500	0,500	0,063	0,590	0,037
55	0,250	5000	0,500	65	0,250	0,425	0,031	0,515	0,016
55	0,250	4500	0,500	55	0,250	0,525	0,031	0,614	0,019
55	0,250	4500	0,500	60	0,500	0,450	0,063	0,540	0,034
55	0,250	4500	0,500	65	0,250	0,375	0,031	0,462	0,014
60	0,250	5000	0,500	55	0,250	0,525	0,031	0,614	0,019
60	0,250	5000	0,500	60	0,500	0,450	0,063	0,540	0,034
60	0,250	5000	0,500	65	0,250	0,375	0,031	0,462	0,014
60	0,250	4500	0,500	55	0,250	0,475	0,031	0,566	0,018
60	0,250	4500	0,500	60	0,500	0,400	0,063	0,489	0,031
60	0,250	4500	0,500	65	0,250	0,325	0,031	0,408	0,013
									0,423

Angebot A hat den größeren Nutzenerwartungswert (0,582) als B (0,423).

Aufgabe 10.11

Eine Unternehmung habe die Auswahl zwischen zwei Investitionsalternativen, die in Abhängigkeit vom zukünftigen Umweltzustand zu den in nachstehender Tabelle enthaltenen Kapitalwerten führen. Die Unternehmung strebt die Maximierung des erwarteten Kapitalwerts an. Leider verfügt sie über keine verläßliche Information hinsichtlich der Eintrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände.

Zustand	s_1	s_2	s_3
$p(s_i)$	p_1	p_2	$1-p_1-p_2$
Alternative a	5	8	3
Alternative b	6	2	6

(a) Ermitteln Sie zunächst analytisch, für welche Werte von p_1 und p_2 Alternative a sich als die optimale erweist. Veranschaulichen Sie Ihr Resultat sodann graphisch, indem Sie in einem Koordinatensystem, in dem p_1 auf der Abszisse und p_2 auf der Ordinate abgetragen wird, diejenigen Bereiche kennzeichnen, in denen Alternative a (bzw. Alternative b) gewählt wird.

(b) Nun trete eine weitere Alternative c hinzu, deren Ausprägungen nachstehend beschrieben sind.

Zustand	s_1	s_2	s_3
Alternative c	0	4	7

Wie verändern sich die Ergebnisse aus (a) angesichts dieser Erweiterung der Alternativenmenge?

(c) Nehmen Sie abweichend von Aufgabenteil (b) an, daß die Ausprägung der Alternative c in s_3 nicht 7, sondern 5 beträgt. Wird Alternative c dann durch eine der beiden anderen Alternativen (zustands-)dominiert? Wiederholen Sie Ihre Analyse aus (b) auf Basis der modifizierten Alternative c. Für welche (p_1, p_2)-Kombinationen erweist sich die modifizierte Alternative c als optimal? Vergleichen Sie die Aussagekraft des Dominanzkriteriums mit der der durchgeführten Sensitivitätsanalyse.

Lösung 10.11

(a)

Die erwarteten Kapitalwerte der beiden Investitionsalternativen in Abhängigkeit von p_1 und p_2 lauten wie folgt (unter Verwendung der Beziehung $p_3 = 1 - p_1 - p_2$):

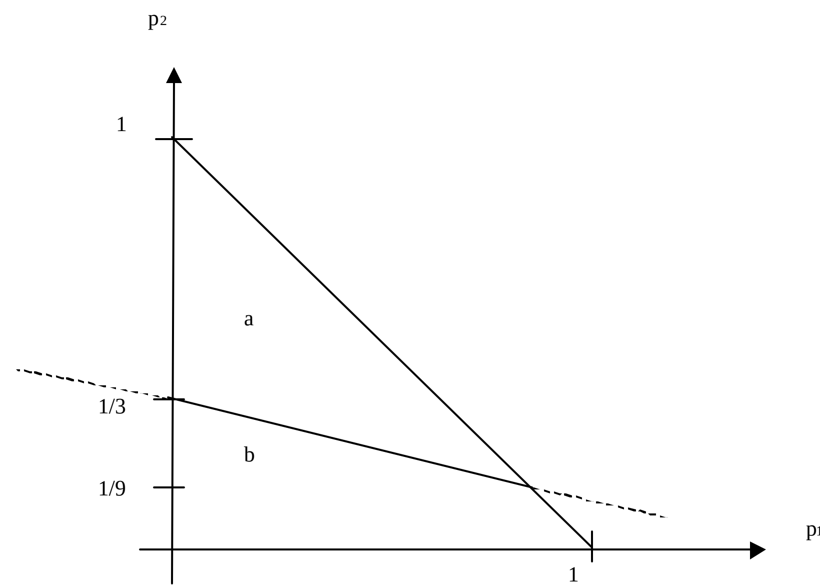
$C_0(a) = 5p_1 + 8p_2 + 3\,(1 - p_1 - p_2) = 3 + 2p_1 + 5\,p_2$
$C_0(b) = 6p_1 + 2p_2 + 6\,(1 - p_1 - p_2) = 6 - 4p_2$

Die Unternehmung ist zwischen beiden Alternativen indifferent, falls $C_0(a) = C_0(b)$ gilt, also falls

$3 + 2p_1 + 5p_2 = 6 - 4p_2 \Leftrightarrow p_2 = 1/3 - 2/9\,p_1$

Für $p_2 > 1/3 - 2/9\,p_1$ ist Alternative a besser und vice versa.

Graphisch stellt sich dies wie folgt dar:



(b)

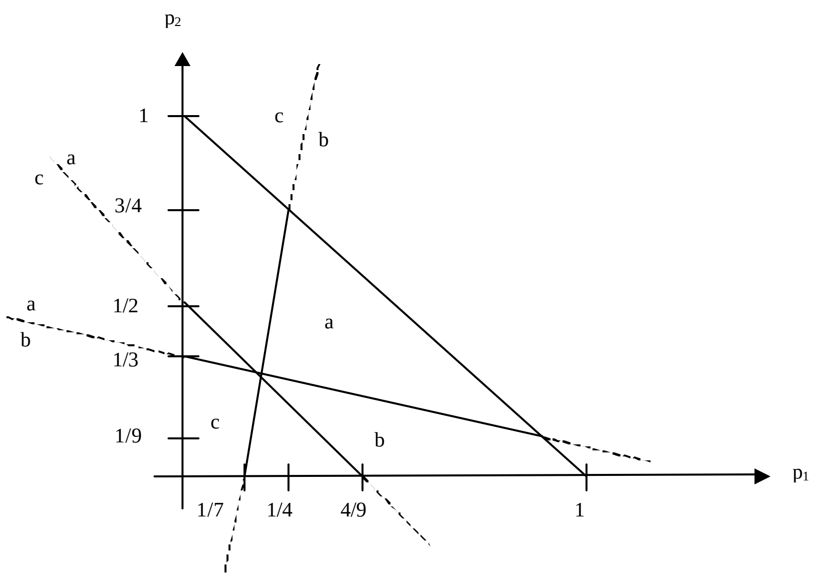
Der erwartete Kapitalwert der neuen Investitionsalternative c in Abhängigkeit von p_1 und p_2 beträgt:

$C_0(c) = 0p_1 + 4p_2 + 7\,(1 - p_1 - p_2) = 7 - 7p_1 - 3p_2$

Analog zur Vorgehensweise in Teilaufgabe (a) gilt:

Indifferenz zwischen a und c $\Leftrightarrow$ $3 + 2p_1 + 5p_2 = 7 - 7p_1 - 3p_2 \Leftrightarrow p_2 = 1/2 - 9/8\, p_1$
Indifferenz zwischen b und c $\Leftrightarrow$ $6 - 4p_2 = 7 - 7p_1 - 3p_2 \Leftrightarrow p_2 = -1 + 7p_1$

Welche Alternative im Gesamtvergleich sämtlicher drei Möglichkeiten die optimale ist, ist dem nachstehenden Schaubild zu entnehmen:



(c)

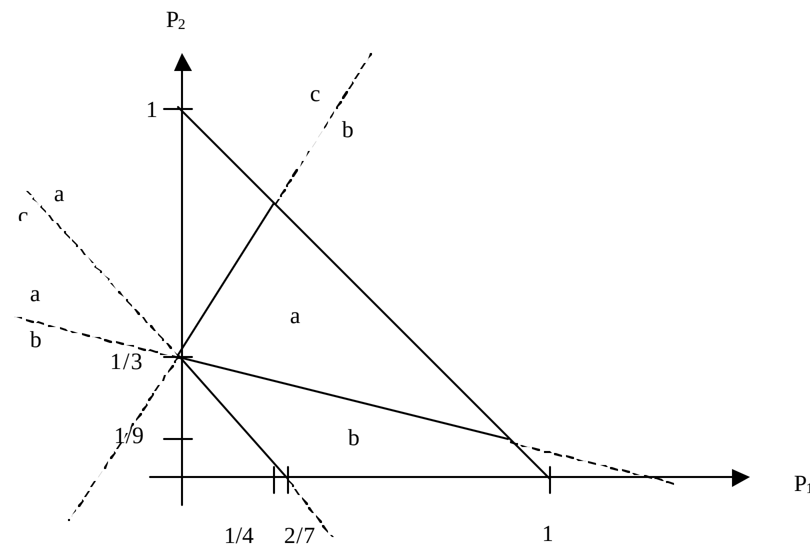
Die modifizierte Investitionsalternative c wird weder von a (5 > 3 in s_3) noch von b (4 > 2 in s_2) (zustands-)dominiert. Der erwartete Kapitalwert der modifizierten Investitionsalternative c in Abhängigkeit von p_1 und p_2 beträgt nun

$C_0(c) = 0p_1 + 4p_2 + 5\,(1 - p_1 - p_2) = 5 - 5p_1 - p_2$

Analog zur Vorgehensweise in den Teilaufgaben (a) und (b) gilt:

Indifferenz zwischen a und c $\Leftrightarrow$ $3 + 2p_1 + 5p_2 = 5 - 5p_1 - p_2 \Leftrightarrow p_2 = 1/3 - 7/6\, p_1$
Indifferenz zwischen b und c $\Leftrightarrow$ $6 - 4p_2 = 5 - 5p_1 - p_2 \Leftrightarrow p_2 = 1/3 + 5/3\, p_1$

Welche Alternative im Gesamtvergleich sämtlicher drei Möglichkeiten die optimale ist, ist dem nachstehenden Schaubild zu entnehmen:



Es fällt auf, daß die modifizierte Alternative c für keine zulässige (p_1, p_2)-Kombination optimal ist. Insofern kann im hier betrachteten Falle mittels der Sensitivitätsanalyse eine weitergehende Folgerung gezogen werden (nämlich der Ausschluß der Alternative c), als dies das Kriterium der Zustandsdominanz ermöglichen würde.

Aufgabe 10.12

Von einem Investor ist bekannt, daß seine Nutzenfunktion konstante absolute Risikoaversion aufweist (daß also $u(x) = -e^{-cx}$ gilt). Jenseits der Feststellung, daß für ihn $c > 0$ gilt, liegen über die Höhe des Risikoaversionskoeffizienten c des Investors keine Informationen vor.
Er hat die Wahl zwischen drei Projekten, deren Zahlungsüberschüsse wie folgt gegeben sind:
- Projekt 1: Zahlungsüberschuß unsicher, gleichverteilt über dem Intervall [1; 2];
- Projekt 2: Zahlungsüberschuß unsicher, Zwei-Punkt-Verteilung mit den Realisationen 1 (mit Wahrscheinlichkeit 0,4) und 2 (mit Wahrscheinlichkeit 0,6);
- Projekt 3: Zahlungsüberschuß sicher in Höhe von 1,4.

Bestimmen Sie die optimale Projektwahl in Abhängigkeit von der Höhe von c. Zweckmäßigerweise sollten Sie Ihre Berechnungen in einem Excel-Sheet durchführen, in welchem Sie im Intervall [0,5; 3,5] c jeweils in Schritten von 0,05 oder 0,1 variieren. Welches Projekt ist für $c \to 0$ optimal und warum? Welches Projekt ist für $c \to \infty$ optimal und warum?

Lösung 10.12

Die drei Projekte führen zu folgenden Erwartungsnutzen in Abhängigkeit des Parameters c:

- Projekt 1: $\mathrm{EU}(\tilde{x}_1) = \int_1^2 -e^{-cx}\,1\,dx = \dfrac{e^{-2c} - e^{-c}}{c}$
- Projekt 2: $\mathrm{EU}(\tilde{x}_2) = 0{,}4(-e^{-c}) + 0{,}6(-e^{-2c})$
- Projekt 3: $\mathrm{EU}(\tilde{x}_3) = -e^{-1{,}4c}$

Die Berechnungen im Excel-Sheet zeigen, daß für sehr kleine Werte von c Projekt 2 optimal ist. Diese Vorteilhaftigkeit kippt ca. bei c = 1,23, ab dem Projekt 1 vorzuziehen ist. Ein erneutes Umschlagen der Vorteilhaftigkeit, diesmal von Projekt 1 nach Projekt 3, findet ca. bei c = 2,52 statt.

Für $c \to 0$ erweist sich Projekt 2 als optimal. $c \to 0$ bedeutet ein Geringerwerden der Risikoaversion hin zum Grenzfall der Risikoneutralität, so daß dasjenige Projekt präferiert wird, welches den höchsten Erwartungswert besitzt (hier: Projekt 2).

Demgegenüber bedeutet $c \to \infty$ ein Stärkerwerden der Risikoaversion, welches das „am wenigsten riskante“ (hier: das völlig risikolose) Projekt (hier: Projekt 3) am attraktivsten erscheinen läßt.