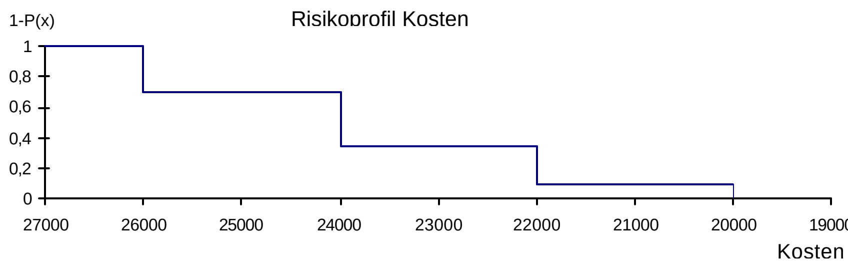
Kapitel 8

Aufgabe 8.1

Ein Projekt habe die folgenden möglichen Konsequenzen (Kosten in €) und deren Wahrscheinlichkeiten. Zeichnen Sie das Risikoprofil des Projekts.

20.000	22.000	24.000	26.000
0,1	0,25	0,35	0,30

Lösung 8.1



Aufgabe 8.2

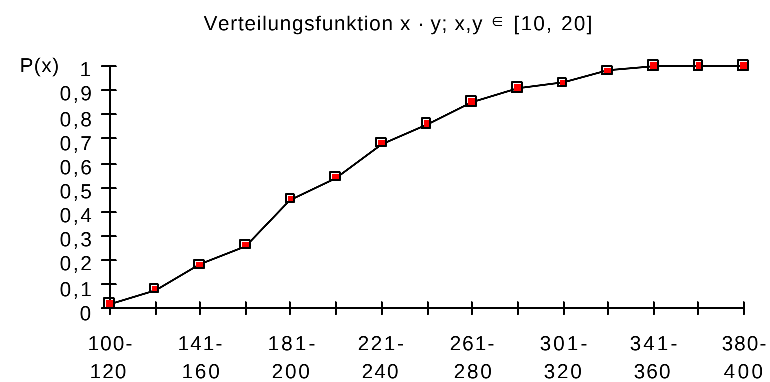
Falls Sie ein Tabellenkalkulationsprogramm mit integriertem Zufallszahlengenerator besitzen: Definieren Sie zwei unsichere, unabhängige Variablen, die jeweils in dem Intervall [10, 20] eine Gleichverteilung aufweisen und verknüpfen Sie sie multiplikativ. Führen Sie hundert Ziehungen durch (Tip: Definieren Sie für jede Ziehung eine extra Zeile!), ordnen Sie die Ergebnisse in aufsteigender Reihenfolge und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion.

Lösung 8.2

Gezogene Zufallszahlen x·y; x,y Î [10, 20]

295,12	133,86	137,13	181,05
203,81	231,71	299,80	360,04
194,34	308,98	261,52	179,80
139,96	173,67	251,59	222,85
161,80	230,33	188,10	326,03
251,76	313,73	175,36	236,52
331,46	338,07	184,01	223,63
160,82	194,09	202,35	344,48
217,59	246,45	242,41	245,62
176,98	264,14	233,10	161,85
192,03	240,50	353,64	250,89
162,41	299,69	234,71	256,13
231,03	267,00	149,57	206,40
128,49	168,58	322,99	193,67
283,37	184,99	271,50	173,97
139,11	251,39	179,33	208,51
256,71	187,21	199,16	337,17
159,52	350,54	336,30	258,05
250,52	155,34	298,96	140,67
212,32	342,69	338,28	230,46
334,47	229,89	299,46	236,77
124,12	131,99	232,56	149,67
158,77	177,63	117,69	151,93
209,89	301,07	141,49	241,09
234,36	269,57	165,46	166,76

Intervall	*Verteilung*	*Häufigkeit*	*Dichte*
100-120	0,02	2	0,02
121-140	0,08	6	0,06
141-160	0,18	10	0,1
161-180	0,26	8	0,08
181-200	0,45	19	0,19
201-220	0,54	9	0,09
221-240	0,68	14	0,14
241-260	0,76	8	0,08
261-280	0,85	9	0,09
281-300	0,91	6	0,06
301-320	0,93	2	0,02
321-340	0,98	5	0,05
341-360	1	2	0,02
361-380	1	0	0
380-400	1	0	0



Aufgabe 8.3

Der Direktor des städtischen Museums, Dr. Danke, wird vom Stadtkämmerer gefragt, mit welchen Besucherzahlen er im nächsten Jahr rechnet. Danke teilt die Besucher in drei Kategorien ein: Studenten, Touristen und Sonstige.

	Untergrenze	Dichtester Wert	Obergrenze
Studenten	800	900	1.200
Touristen	1.000	1.300	1.600
Sonstige	1.500	2.000	3.000

Die Besucherzahlen dieser drei Kategorien hält er für stochastisch unabhängig voneinander. Für jede Kategorie glaubte er, die Verteilung durch eine Dreiecksverteilung hinreichend gut annähern zu können (Tabelle).

(a) Versuchen Sie, die Verteilungsfunktion einer Dreiecksverteilung mit den Parametern *a* (Untergrenze), *b* (dichtester Wert) und *c* (Obergrenze) abzuleiten.

(b) Dr. Danke schlägt die Lösung zu Aufgabe (a) nach; sie lautet

$$P(x) = \frac{(x-a)^2}{(c-a)(b-a)} \quad \text{für } x \le b$$

$$P(x) = 1 - \frac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)} \quad \text{für } x > b$$

Erzeugen Sie mit Hilfe dieser Funktionen (und möglichst mit Hilfe eines Computers) ein Risikoprofil der Besucherzahlen.

(c) Der Kämmerer deutet an, daß das Museum geschlossen werden muß, wenn es nicht mindestens 4.500 Besucher im Jahr anzieht. Wie groß ist die Chance, daß diese Zahl überschritten wird?

Lösung 8.3

(a) Für die Wahrscheinlichkeit im Intervall [Untergrenze, Dichtester Wert] (aufsteigender Ast) gilt:

$$p_{[a,\,b]} = \frac{(b-a)\cdot \max}{2}$$

Für die Wahrscheinlichkeit im Intervall [Dichtester Wert, Obergrenze] (fallender Ast) gilt:

$$p_{[b,\,c]} = \frac{(c-b)\cdot \max}{2}$$

Da die Summe der Wahrscheinlichkeit 1 ergeben muß, gilt:

$$\frac{(b-a)\cdot \max}{2} + \frac{(c-b)\cdot \max}{2} \overset{!}{=} 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{((b-a)+(c-b))\cdot \max}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(c-a)\cdot \max}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{c-a} = \max$$

Es sind je zwei Punkte auf dem steigenden und fallenden Ast der Dichtefunktion bekannt:
- steigender Teil: (a, 0) und (b, max)
- fallender Teil: (b, max) und (c, 0)

allgemeine Geradengleichung: $y = m\,x + n$

Steigung berechnen für den steigenden Ast der Dichtefunktion:

$$m = \frac{\max}{b-a}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{2}{(c-a)\cdot(b-a)}$$

Einsetzen eines bekannten Punktes auf dem steigenden Ast der Dichtefunktion und Auflösen der Geradengleichung nach dem y-Achsenabschnitt n.

$$\max = \frac{\max}{(b-a)}\cdot b + n$$

$$\Rightarrow \quad n = \max - \frac{\max\cdot b}{(b-a)} = \frac{\max\cdot(b-a)}{(b-a)} - \frac{\max\cdot b}{(b-a)} = -\frac{\max\cdot a}{(b-a)}$$

$$= -\frac{\frac{2}{(c-a)}\cdot a}{(b-a)} = \frac{2a}{(c-a)\cdot(b-a)}$$

Einsetzen von m und n in die Geradengleichung:

$$y = \frac{2x}{(c-a)\cdot(b-a)} - \frac{2a}{(c-a)\cdot(b-a)} = \frac{2x-2a}{(c-a)\cdot(b-a)} \qquad \text{für } x \le b$$

Zur Ermittlung der Verteilungsfunktion muß das Integral unter dem steigenden Ast der Dichtefunktion ermittelt werden. Dies erfolgt mittels der Substitutionsregel der Integralrechnung:

$$P(x) = \int_a^b p'(x)\,dx \frac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)}$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{(x-a)^2}{(c-a)(b-a)} \qquad \text{für } x \le b$$

Analoge Vorgehensweise auf dem fallenden Ast der Dichtefunktion.

(b) Gegeben: Verteilungsfunktion der stochastisch unabhängigen Besuchergruppen
Wirkungsmodell:
Gesamtbesucherzahl = Studenten + Touristen + Sonstige
Bekannt: P'(x) = 1 – P(x)

Die Tabellenkalkulation zieht eine Zufallszahl zwischen 0 und 1. Dieser Wert wird als Verteilungswert für eine Besuchergruppe interpretiert. Mit Hilfe der Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion wird die Zahl der Besucher für eine Besuchergruppe ermittelt. Dabei wird die Dreiecksverteilung berücksichtigt, indem die Zufallszahl mit dem Verteilungswert des dichtesten Wertes verglichen wird und dann die Umkehrfunktion für $x \le b$ bzw. $x > b$ verwendet wird. Die so bestimmten Besucherzahlen je Gruppe werden addiert, um eine Gesamtbesucherzahl zu erhalten. Dieser Vorgang wird n-mal wiederholt. Nach n Simulationsdurchläufen kann die relative Häufigkeit für bestimmte Intervalle der Gesamtbesucherzahl festgestellt werden. Daraus kann eine Verteilung und schließlich ein Risikoprofil für die Gesamtbesucherzahl ermittelt werden.

Berechnung der Umkehrfunktion für $x \le b$:

$$P(x) = \frac{(x-a)^2}{(c-a)(b-a)} \qquad \Rightarrow \quad P(x)\cdot((c-a)(b-a)) = (x-a)^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{P(x)\cdot((c-a)(b-a))} + a \qquad \text{für } x \le b$$

Analoge Berechnung der Umkehrfunktion für $x > b$.

Erzeugung zufälliger Besucherzahlen

	Studenten	Touristen	Sonstige	
$z \le P(b)$	846	1225	2123	mit Umkehrfunktion errechnet
$z > P(b)$	863	1345	2149	mit Umkehrfunktion errechnet
Zufallszahl z	0,05376956	0,28218169	0,5176994	in Umkehrfkt. einzusetzender Wert
	846	1225	2149	Simulierte Besucherzahlen
			4220	Gesamtbesucherzahl

Simulation

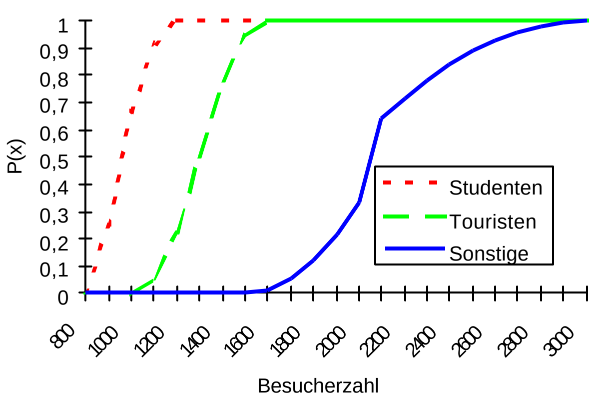
Simulationsergebnisse

3810	Lauf 1	**Intervalle**	**Dichte**	**Relative Häufigkeit**
3825	Lauf 2	4000	0,09	3
3999	...	4200	0,26	9
4054		4400	0,23	8
4069		4600	0,14	5
4078		4800	0,14	5
4101		5000	0,11	4
4124		5200	0,03	1
4146			**1**	**35**
4154			**Verteilung**	
4195		4000	0,09	
4200		4200	0,34	
4237		4400	0,57	
4258		4600	0,71	
4288		4800	0,86	
4298		5000	0,97	
4316		5200	1,00	
4335				
4362			**Risikoprofil**	
4397		4000	0,91	
4427		4200	0,66	
4454		4400	0,43	
4500		4600	0,29	
4559		4800	0,14	
4568		5000	0,03	
4621		5200	0,00	
4629				
4640				
4731				
4762				
4902				
4939				
4958				
4971	...			
5307	Lauf 35			

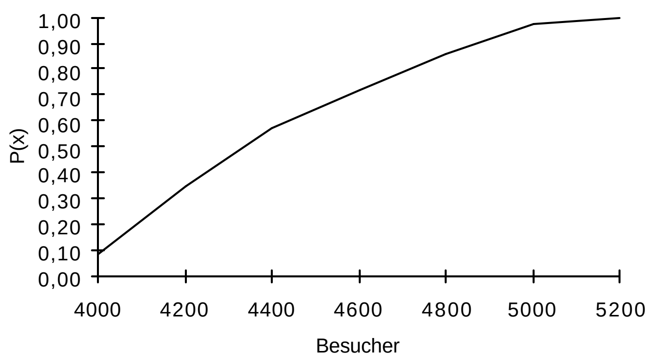
Verteilungsfunktionen

Besucher	Studenten	Touristen	Sonstige
800	0	0	0
900	0,25	0	0
1000	0,66666667	0	0
1100	0,91666667	0,05555556	0
1200	1	0,22222222	0
1300	1	0,5	0
1400	1	0,77777778	0
1500	1	0,94444444	0
1600	1	1	0,01333333
1700	1	1	0,05333333
1800	1	1	0,12
1900	1	1	0,21333333
2000	1	1	0,33333333
2100	1	1	0,64
2200	1	1	0,71555556
2300	1	1	0,78222222
2400	1	1	0,84
2500	1	1	0,88888889
2600	1	1	0,92888889
2700	1	1	0,96
2800	1	1	0,98222222
2900	1	1	0,99555556
3000	1	1	1

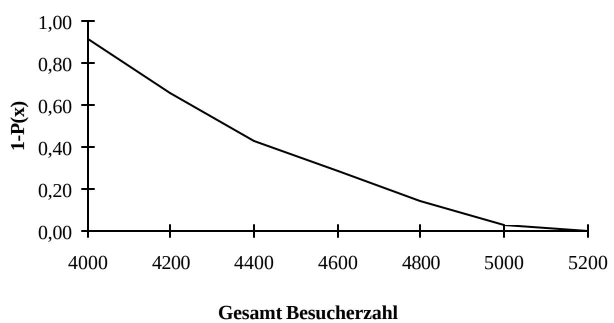
Verteilungsfunktionen



Simulierte Verteilung der Gesamtbesucherzahl



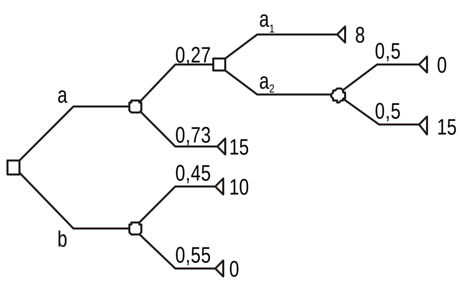
Risikoprofil



(c) Ein jährliche Besucherzahl von 4.500 wird mit 42% Wahrscheinlichkeit überschritten.

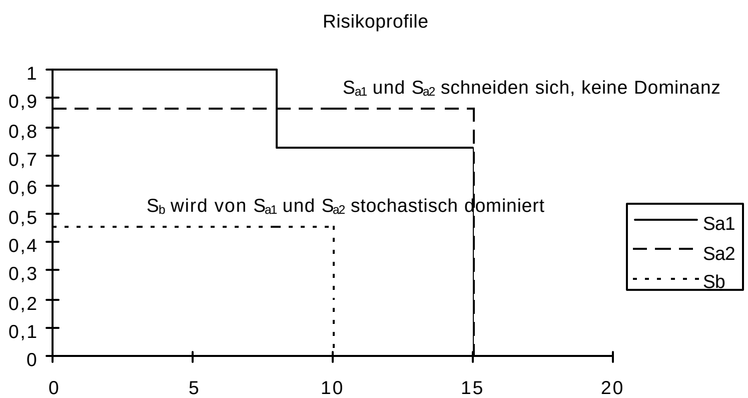
Aufgabe 8.4

Im folgenden Entscheidungsbaum sind drei Strategien möglich. Berechnen Sie deren Risikoprofile.



Lösung 8.4

	Strategie b		Strategie a_1		Strategie a_2	
p	0,45	0,55	0,27	0,73	0,27 · 0,5 = 0,135	0,27 · 0,5 + 0,73 = 0,865
x	10	0	8	15	0	15



Aufgabe 8.5

(a) Charakterisieren Sie die Entscheidungssituationen, in denen sich eine Simulation anbietet. Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein?

(b) Diskutieren Sie die Probleme einer Simulation bei mehreren Zielen.

Lösung 8.5

(a) *Voraussetzungen:*
- Dichte- bzw.Verteilungsfunktion muß bekannt oder schätzbar sein, z.B. Erwartungswert und Streuung einer normalverteilten Ereignisvariablen.
- Bei stochastisch abhängigen Variablen braucht man zusätzlich Einschätzungen der Kovarianzen.
- Bei mehreren Ereignisvariablen, die aggregiert werden, muß eine geeignete Aggregationsfunktion bestimmt werden.
- Die Umkehrfunktion muß analytisch oder näherungsweise bestimmt werden.

Charakterisierung der Entscheidungssituation:
- komplexes Wirkungsmodell
- mehrere relevante Ereignisvariablen

(b) Anders als bei der Beschränkung auf ein Ziel, führt die stochastische Dominanz bzgl. eines Ziels in einem Entscheidungskontext mit mehreren Zielen nicht dazu, daß eine Strategie eliminiert werden kann. Grundsätzlich lassen sich Simulationen aber auch bei mehreren Zielen problemlos durchführen. Es sind sicherlich zusätzliche Überlegungen in bezug auf die Verknüpfung der Simulationsergebnisse zu einem erwarteten Nutzen (multiattributiv) anzustellen.

Aufgabe 8.6

Der Umsatz eines Unternehmens ergibt sich aus der Summe der normalverteilten Umsätze der Produkte A, B und C. Die folgende Tabelle gibt die Parameter der jeweiligen Normalverteilungen an. Berechnen Sie analytisch die Gesamtverteilung des Umsatzes.

Produkt	Erwartungswert	Standardabweichung
A	1 Mio. €	0,5 Mio. €
B	2 Mio. €	0,5 Mio. €
C	4 Mio. €	1,5 Mio. €

Lösung 8.6

Der Gesamtumsatz ist gleich der Summe der Einzelumsätze. Der Erwartungswert der Umsätze ist dann gleich:

EW(Gesamtumsatz) = EW(Umsatz A) + EW(Umsatz B) + EW(Umsatz C)
= 1 + 2 + 4 = 7 [Mio. €]

Da die Umsätze als stochastisch unabhängig angenommen werden, gilt für die Varianz der Summe:

Var(Gesamtumsatz) = Var(Umsatz A) + Var(Umsatz B) + Var(Umsatz C)
= $0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2 = 2{,}75$ [Mio. €^{2}]

Die Streuung beträgt:

σ(Gesamtumsatz) = √Var(Gesamtumsatz) = √2,75 = 1,66 [Mio. €]

Die gemeinsame normalverteilte Verteilungsfunktion lautet dann:

$$P(x) = \frac{1}{1{,}66 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-7}{1{,}66}\right)^2}$$