Kapitel 7

Aufgabe 7.1

Welche Wahrscheinlichkeitsinterpretationen liegen den folgenden Aussagen zugrunde:

(a) Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln acht oder mehr Augen zu werfen, beträgt 5/12.
(b) Politiker: Die Chance für einen Sieg der SPD bei der nächsten Wahl ist 55%.
(c) Fußballspieler: In der nächsten Saison steigen wir mit Sicherheit in die zweite Bundesliga auf.
(d) Die Wahrscheinlichkeit, daß das Kind ein Junge wird, beträgt 100/206.
(e) Die Unfallwahrscheinlichkeit auf Bundesstraßen ist erheblich höher als auf Autobahnen.

Lösung 7.1

(a) symmetrisch:
- aus Eigenschaften des Würfels gefolgert
- Prinzip des unzureichenden Grundes (Laplace)

(b) subjektiv:
- Einschätzung einer Person
- nicht überprüfbar

(c) subjektiv
(d) frequentistisch:
- relative Häufigkeit des Ereignisses gemessen aufgrund von Wiederholungen eines Vorganges
- Annahme der identischen Wiederholbarkeit des Ereignisses

(e) frequentistisch

Aufgabe 7.2

Sie hören die folgenden Aussagen eines Bekannten und wollen gerne wissen, welche subjektiven Wahrscheinlichkeiten er mit diesen Aussagen ausdrücken wollte. Schätzen Sie zu jeder Aussage die Mindest- und die Höchstwahrscheinlichkeit.

(a) Wahrscheinlich werde ich nächstes Mal F.D.P. wählen.
(b) Es ist eher unwahrscheinlich, daß die Meiers sich wieder versöhnen werden.
(c) Ich bin überzeugt, ich könnte den Job meines Chefs ebensogut machen wie er.
(d) Nach der letzten Statistik-Klausur habe ich ein ganz gutes Gefühl.
(e) Den Schirm kann ich unmöglich in der Straßenbahn vergessen haben.

Lassen Sie auch ein paar andere Personen diese Wahrscheinlichkeiten schätzen und ermitteln Sie die Spanne zwischen der niedrigsten genannten Mindest- und der höchsten Höchstwahrscheinlichkeit zu jeder Aussage.

Lösung 7.2

Da es sich hier um subjektive Wahrscheinlichkeiten handelt, wollen wir Ihren Intervallangaben nicht vorgreifen. Die Aufgabe sollte Sie aber dazu anregen, über die Unschärfe von verbalen Wahrscheinlichkeitsaussagen nachzudenken.

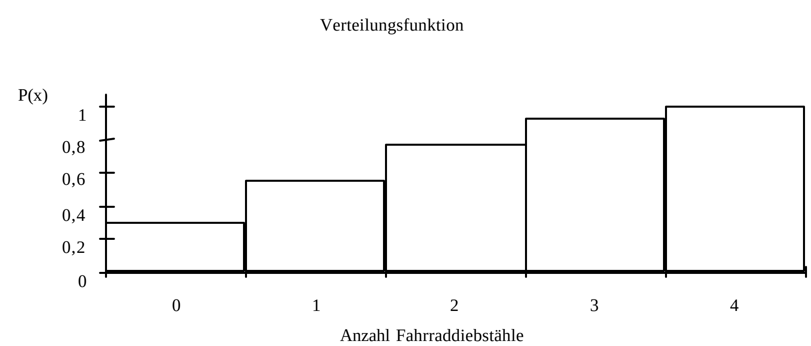
Aufgabe 7.3

In einer Kleinstadt verteilt sich die Anzahl der pro Tag gemeldeten Fahrraddiebstähle wie folgt:

0	1	2	3	4
30%	25%	22%	16%	7%

Errechnen und zeichnen Sie die entsprechende Verteilungsfunktion.

Lösung 7.3



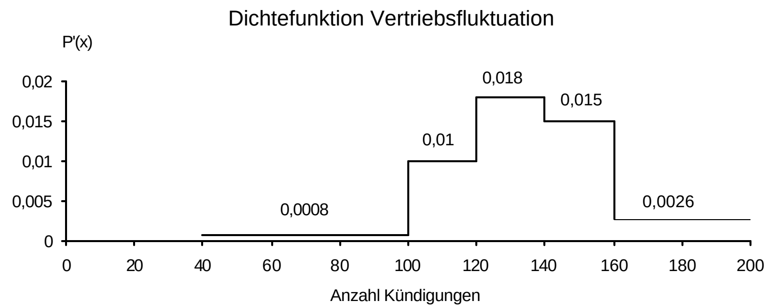
Aufgabe 7.4

Bei der Personalplanung muß die Fluktuation im Bereich des Vertriebs geschätzt werden. Aufgrund von Erfahrungen wird folgende Verteilung der Anzahl von Beschäftigten, die im nächsten Jahr kündigen werden, geschätzt.

40-100	101-120	121-140	141-160	161-200
5%	20%	35%	30%	10%

Behandeln Sie die Personenzahl als stetige Variable und zeichnen Sie die Dichtefunktion dieser Verteilung.

Lösung 7.4



Aufgabe 7.5

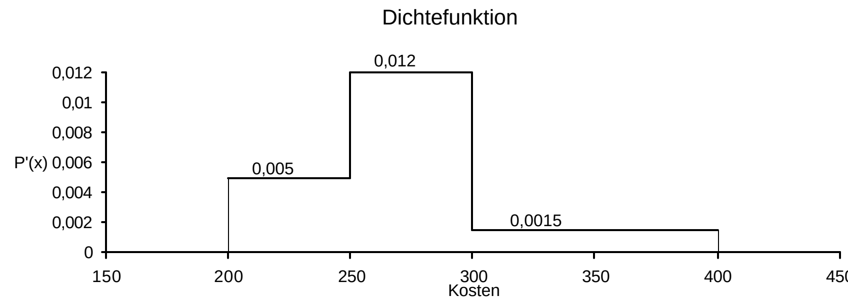
Für die voraussichtlichen Kosten einer Entwicklung wird folgende Verteilung gegeben: Mit 25% Wahrscheinlichkeit 200.000-250.000 €, mit 60% Wahrscheinlichkeit 250.000-300.000 €, mit 15% Wahrscheinlichkeit 300.000-400.000 €. Innerhalb jedes Intervalls wird eine Rechteckverteilung angenommen.

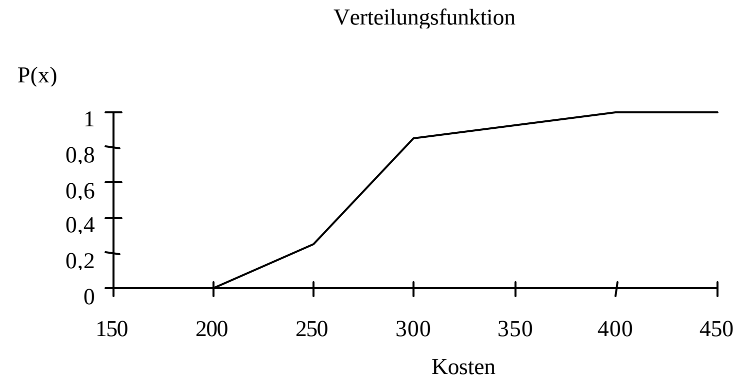
(a) Zeichnen Sie die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion.

(b) Man möchte die stetige Variable „Entwicklungskosten" diskretisieren und nur drei Ausprägungen betrachten. Welche Ausprägungen würden Sie nehmen und welche Wahrscheinlichkeiten würden Sie ihnen zuordnen? Zeichnen Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion.

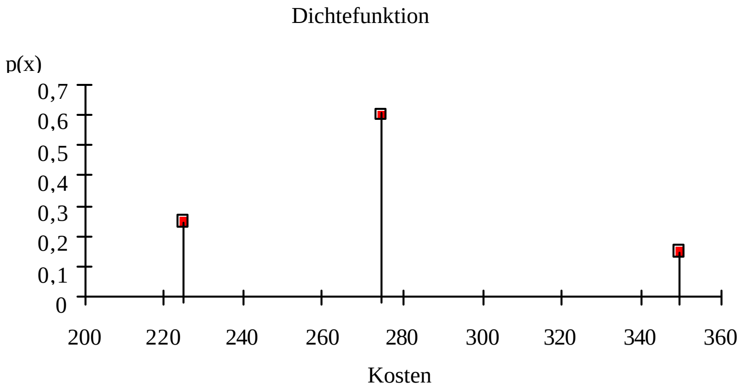
Lösung 7.5

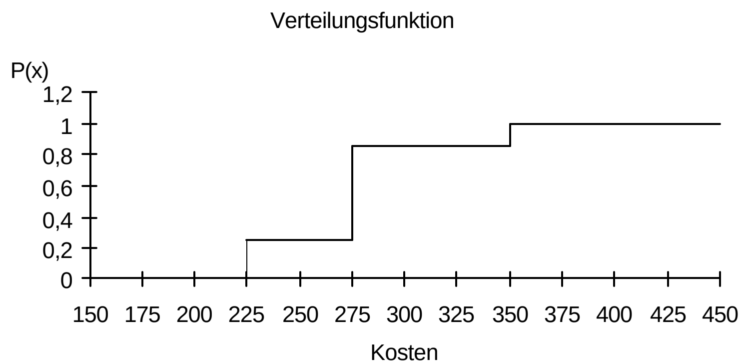
(a)





(b) Am geeignetsten zur Approximation der stetigen Variable ist die Wahl der Mitte der Intervalle: 225, 275, 350. Der Erwartungswert der stetigen Variable ist 273,75 (wie bei der diskretisierten Variable). Man kann sich sehr leicht überlegen, daß das immer so sein muß (gleiche Erwartungswerte), wenn man bei einer stückweise linearen stetigen Verteilungsfunktion nur die Mittelpunkte der einzelnen Intervalle berücksichtigt.





Aufgabe 7.6

Es ist abzuschätzen, wieviele neue Arbeitsplätze in einer Region durch die Einrichtung eines Technologieparks geschaffen werden könnten. Die eingesetzte Projektgruppe erarbeitet folgende Parameter der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

- Mindestens werden 100 neue Arbeitsplätze geschaffen.
- Der 20%-Punkt liegt bei 130, der 40%-Punkt bei 150, der 60%-Punkt bei 165, der 80%-Punkt bei 220 Arbeitsplätzen.
- Maximal erscheinen 400 Arbeitsplätze als möglich.

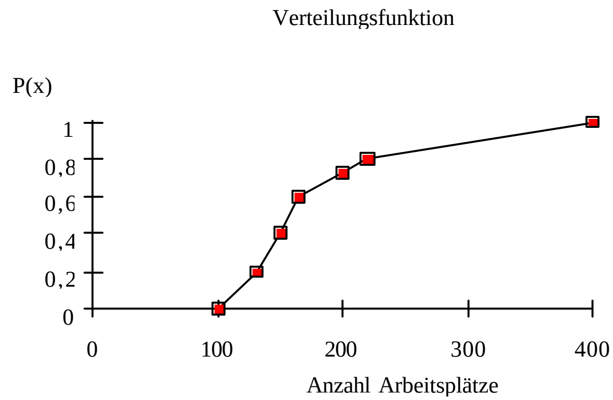
(a) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion, indem Sie die genannten Punkte linear verbinden.

b) Wie wahrscheinlich ist es, daß mehr als 200 neue Arbeitsplätze geschaffen werden?

c) Wie wahrscheinlich ist es, daß 150-180 Arbeitsplätze geschaffen werden?

Lösung 7.6

(a)



(b) $P(200) = 0{,}6 + 35 \cdot (0{,}8 - 0{,}6) / (220 - 165) = 0{,}73$

$\Rightarrow \; 1 - P(200) = 1 - 0{,}73 = 0{,}27$

(c) $P(180) - P(150) = 0{,}65 - 0{,}4 = 0{,}25$

Aufgabe 7.7

Vor der Einräumung eines Warenkredits an die Wackel GmbH & Co KG versucht ein Lieferant, sich ein Bild von der Bonität des Unternehmens zu machen. Er vermutet aufgrund seiner bisherigen Informationen mit 90% Wahrscheinlichkeit, daß er keine Forderungsverluste erleiden wird. Um sicher zu gehen, befragt er seine Hausbank. Diese bezeichnet nach seinen früheren Erfahrungen gute Kunden vorher in 95% der Auskünfte als kreditwürdig, während sie in 5% der Fälle fälschlich von Krediten abrät. Bei den Kunden, die sich später als nicht kreditwürdig herausstellten, hatte die Bank in der Hälfte der Fälle eine positive, in der anderen Hälfte der Fälle eine negative Auskunft gegeben. Die Bank warnt vor einer Kreditgewährung an Wackel. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Kredit notleidend wird?

Lösung 7.7

Gegeben: *Mögliche Umweltzustände*:
s_1 = Kredit wird nicht notleidend
s_2 = Kredit wird notleidend (Kreditausfall)

Apriori-Wahrscheinlichkeiten (Einschätzung Lieferant):
$p(s_1) = 0{,}9$
$p(s_2) = 0{,}1$

Daten/Beobachtungen:
y_1 = Auskunft Hausbank erklärt Kunden für kreditwürdig
y_2 = Auskunft Hausbank erklärt Kunden für nicht kreditwürdig

Likelihoods (Einschätzung Lieferant):
p(kreditwürdig | nicht notleidend) = $p(y_1 \mid s_1) = 0{,}95$
p(kreditwürdig | notleidend) = $p(y_1 \mid s_2) = 0{,}5$

Gesucht: p(notleidend | nicht kreditwürdig)

Zustände	$p(s_i)$	kreditwürdig Likelihoods	nicht kreditwürdig $p(y_j \mid s_i)$	
nicht notleidend	0,9	0,95	0,05	$\Sigma = 1$
notleidend	0,1	0,5	0,5	$\Sigma = 1$

Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten $p(y_j, s_i)$:

	Kredit	nicht Kredit	
nicht notleidend	$p(y_1, s_1) = p(s_1) \cdot p(y_1 \mid s_1)$ $= 0{,}9 \cdot 0{,}95$ $= 0{,}855$	$0{,}9 \cdot 0{,}05 = 0{,}045$	
notleidend	0,05	0,05	
Summe	$0{,}905 = p(y_1)$	$0{,}095 = p(y_2)$	$\Sigma = 1$

Aposteriori-Wahrscheinlichkeiten $p(s_i \mid y_j)$:

	Kredit	nicht Kredit
nicht notleidend	$p(s_1 \mid y_1) = p(y_1, s_1) / p(y_1)$ $= 0{,}855 / 0{,}905$ $= 0{,}945$	0,474
notleidend	0,055	0,526
	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit, daß die getätigte Voraussage eintrifft:
p(notleidend | nicht kreditwürdig) = 0,526 = 52,6%

Aufgabe 7.8

Im Herbst 1990 veröffentlichte Marylin vos Savant in ihrer Kolumne „Fragen Sie Marylin" in der US-amerikanischen Zeitschrift *Parade* folgende Denksport-aufgabe. Bei einer Fernseh-Spielshow steht der Kandidat vor drei verschlossenen Türen. Er weiß: Der große Preis, ein Auto, wartet hinter einer der Türen; hinter den beiden anderen steht je eine Ziege. Der Kandidat gewinnt das Auto, wenn er die richtige Tür öffnet. Angenommen, er zeigt auf Tür Nr. 1. Der Quizmaster öffnet jedoch nicht diese, sondern stattdessen Tür Nr. 3; eine Ziege wird sichtbar. Darauf fragt der Quizmaster den Kandidaten, ob er bei seiner Wahl –Tür Nr. 1 – bleiben oder lieber Nr. 2 wählen wolle. Marylin behauptete, der Kandidat solle jetzt seine Wahl ändern; die Chance, daß das Auto hinter Tür Nr. 2 stehe, sei doppelt so groß wie für Tür Nr. 1. Diese Lösung führte zu einer monatelangen Leserbrief-Flut, die auch auf andere Zeitschriften übergriff, welche das Problem abdruckten. Die meisten Leserbriefschreiber, darunter viele Mathematiker, bestritten vehement die Richtigkeit der Lösung. – Was meinen Sie? (Das Problem führte zur Veröffentlichung eines amüsanten populärwissenschaftlichen Buches über das Denken in Wahrscheinlichkeiten: von Randow 1992.)

Lösung 7.8

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, daß sich der Kandidat zunächst für Tür 1 entscheidet.

Explizite Annahmen:
- Der Moderator darf nicht die Türe öffnen, auf die der Kandidat zeigt.
- Der Moderator darf nicht die Türe öffnen, hinter der sich das Auto befindet.
- Der Moderator will zunächst eine andere Tür öffnen, als die, auf die der Kandidat zeigt, um das Spiel spannender zu gestalten. Er will dem Kandidaten damit weder helfen noch schaden.

Mögliche Umweltzustände:
S_1 = Auto steht hinter Tür 1
S_2 = Auto steht hinter Tür 2
S_3 = Auto steht hinter Tür 3

Apriori-Wahrscheinlichkeiten: $p(S_1) = p(S_2) = p(S_3) = 1/3$

Daten/Beobachtungen:
x_1 = Moderator öffnet Tür 2
x_2 = Moderator öffnet Tür 3
(Tür 1 darf er nicht öffnen.)

Likelihoods:
$p(x_1 | S_1) = 1/2$
$p(x_1 | S_2) = 0$ (Wenn Auto hinter Tür 2, darf diese nicht vom Moderator geöffnet werden.)
$p(x_1 | S_3) = 1$ (Wenn Auto hinter Tür 2, muß der Moderator Tür 3 öffnen.)

Zustände	$p(S_j)$	Moderator öffnet Tür 2	Moderator öffnet Tür 3	
Auto hinter Tür 1	1/3	1/2	1/2	$\Sigma = 1$
Auto hinter Tür 2	1/3	0	1	$\Sigma = 1$
Auto hinter Tür 3	1/3	1	0	$\Sigma = 1$

Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten $p(x_i, S_j)$:

Zustände	Moderator öffnet Tür 2	Moderator öffnet Tür 3
Auto hinter Tür 1	1/6	1/6
Auto hinter Tür 2	0	1/3
Auto hinter Tür 3	1/3	0
	$\Sigma = 1/2$	$\Sigma = 1/2$

Aposteriori Wahrscheinlichkeiten $p(S_j | x_i)$:

Zustände	Moderator öffnet Tür 2	Moderator öffnet Tür 3
Auto hinter Tür 1	1/3	1/3
Auto hinter Tür 2	0	2/3
Auto hinter Tür 3	2/3	0
	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$

Bei einem Wechsel der gewählten Tür nach dem Öffnen der Türen durch den Moderator beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit 2/3. Falls die Wahl nicht geändert wird (man bleibt bei Tür 1), beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit 1/3. Also wird die Chance, das Auto zu gewinnen, bei einem Wechsel der Tür doppelt so groß.

Aufgabe 7.9

Die Drillinge Agathe, Beatrix und Carolin haben herausgefunden, daß eine von ihnen zum Geburtstag von ihren Eltern ein Auto bekommen wird, die beiden anderen je eine Ziege. Agathe bestürmt ihren Vater, ihr zu sagen, wer das Auto kriegt, doch der Vater weigert sich. Da sagt Agathe: „Wenn du mir schon nicht sagen willst, was ich bekomme, dann nenne mir doch wenigstens den Namen *einer* von uns, die eine Ziege kriegt.“ Darauf läßt sich der Vater ein und sagt: „Eine Ziege ist für Carolin.“ Dies hört Agathe gern, denn nun hat sie eine 50-50-Chance für das Auto. Oder?

Lösung 7.9

Explizite Annahmen:
- Der Vater will auf keinen Fall die Information preisgeben, wer das Auto erhält.
- Agathe geht davon aus, daß der Vater ihr nicht sagen will, was sie bekommt.
- Der Vater lügt nicht.

Mögliche Umweltzustände:
S_1 = Agathe erhält das Auto
S_2 = Beatrix erhält das Auto
S_3 = Carolin erhält das Auto

Apriori-Wahrscheinlichkeiten: $p(S_1) = p(S_2) = p(S_3) = 1/3$

Daten/Beobachtungen:
x_1 = Vater sagt, Agathe erhält eine Ziege
x_2 = Vater sagt, Beatrix erhält eine Ziege
x_3 = Vater sagt, Carolin erhält eine Ziege

Likelihoods:
$p(x_1 | S_1) = 0$ (Wenn Agathe das Auto erhält, kann der Vater nicht sagen, daß sie eine Ziege erhält.)
$p(x_1 | S_2) = 0$ (Vater will nicht sagen, was Agathe erhält, auch wenn dies nur eine Ziege ist.)
$p(x_1 | S_3) = 0$ ...
$p(x_2 | S_1) = 1/2$
$p(x_2 | S_2) = 0$
$p(x_2 | S_3) = 1$ (Wenn Carolin das Auto erhält, kann der Vater nicht sagen, daß Carolin eine Ziege erhält, er kann auch nicht Agathe sagen, daß sie eine Ziege erhält, da er ihr überhaupt nicht sagen will, was Agathe bekommt.)
usw.

Zustände	$p(S_i)$	x_1	x_2	x_3	
S_1 Agathe erhält Auto	1/3	0	1/2	1/2	$\Sigma = 1$
S_2 Beatrix erhält Auto	1/3	0	0	1	$\Sigma = 1$
S_3 Carolin erhält Auto	1/3	0	1	0	$\Sigma = 1$

Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten $p(x_j, S_i)$:

Zustände	x_1	x_2	x_3
S_1 Agathe erhält Auto	0	1/6	1/6
S_2 Beatrix erhält Auto	0	0	1/3
S_3 Carolin erhält Auto	0	1/3	0
	$\Sigma = 0$	$\Sigma = 1/2$	$\Sigma = 1/2$

Aposteriori Wahrscheinlichkeiten $p(S_i \mid x_j)$:

Zustände	x_1	x_2	x_3
S_1 Agathe erhält Auto	-	1/3	1/3
S_2 Beatrix erhält Auto	-	0	2/3
S_3 Carolin erhält Auto	-	2/3	0
		$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$

Agathes Wahrscheinlichkeit ist nach wie vor 1/3, sie hat also keine zusätzliche Information bekommen.

Aufgabe 7.10

Zwanzig Personen sind zusammen auf einer Party. Schätzen Sie intuitiv die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei oder mehrere von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben. Anschließend berechnen Sie den korrekten Wert unter der Annahme, daß alle Tage gleichwahrscheinlich sind.
Hinweis:
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist 1 – p(Kein gemeinsamer Geburtstag)
und es gilt
p(Kein gemeinsamer Geburtstag = 364/365 · 363/365 · 362/365 · ... · 346/365.

Lösung 7.10

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Geburtstage von n Personen beträgt 365^n. Die Anzahl der Möglichkeiten, daß alle Partygäste an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben, berechnet sich wie folgt:

Für die erste Person gibt es 365 Tage zur Auswahl. Für die zweite Person gibt es nur 365 minus dem Geburtstag der ersten Person Tage zur Auswahl und so weiter:

$$365 \cdot (365-1) \cdot (365-2) \cdot \ldots \cdot (365-(n-1))$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß n Personen unterschiedliche Geburtstage haben, beträgt:

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-(n-1))}{365^n}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß zwei oder mehr Personen an dem gleichen Tag Geburtstag haben, ist dann die Restwahrscheinlichkeit:

$$1-\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-(n-1))}{365^n}$$

Für n = 20 beträgt die Wahrscheinlichkeit somit 0,4114 = 41,14%.

Aufgabe 7.11

In der Zeitschrift „Management Focus“ erschien 1984 ein Artikel, aus dem Dawes (1988, S. 75) folgenden Ausschnitt zitiert.

> Ergebnisse einer neuen Befragung von 74 leitenden Managern deuten darauf hin, daß eine Beziehung zwischen dem Besitz von Haustieren in der Kindheit und zukünftigem Karriere-Erfolg bestehen könnte.
>
> Volle 94% der Manager, alle bei den 500 größten Unternehmen nach „Fortune“, hatten als Kinder einen Hund, eine Katze oder beides besessen. ...
>
> Die Befragten behaupteten, daß der Besitz eines Haustiers ihnen geholfen habe, viele der positiven Charakterzüge zu entwickeln, die sie heute zu guten Managern gemacht hätten, insbesondere Verantwortungsgefühl, Einfühlungsvermögen, Respekt für andere lebende Wesen, Großzügigkeit und gute Kommunikationsfähigkeit.

(a) Läßt sich die genannte These aus dem Befragungsergebnis rechtfertigen?
(b) Angenommen, Sie schätzen, daß 70% aller Manager in ihrer Kindheit ein Haustier besessen haben und 10% aller Manager eine so gehobene Position erreichen wie die in der genannten Befragung. Wird die These von der charakterprägenden Wirkung der Haustiere bestätigt?

Lösung 7.11

(a) Nein. Aus der bedingten Wahrscheinlichkeit, daß 94% aller erfolgreichen Manager früher ein Haustier hatten (p(Haustier | Karriere)), kann nichts über die bedingte Wahrscheinlichkeit des „Karrieremachens“ unter der Bedingung, daß man ein Haustier hatte (p(Karriere | Haustier)), gesagt werden.

(b) Gegeben: $H \mathrel{\hat{=}}$ Haustier
$K \mathrel{\hat{=}}$ Karriere
$p(H \mid K) = 0{,}94$
$p(H) = 0{,}7$
$p(K) = 0{,}1$

Gesucht: Vergleich zwischen $p(K \mid H)$ und $p(K \mid \overline{H})$

Also:

$$p(K \mid H) = \frac{p(K, H)}{p(H)} = \frac{p(H \mid K) \cdot p(K)}{p(H)} = \frac{0{,}94 \cdot 0{,}1}{0{,}7} = 0{,}134$$

$$p(K \mid \overline{H}) = \frac{p(K, \overline{H})}{p(\overline{H})} = \frac{p(\overline{H} \mid K) \cdot p(K)}{p(\overline{H})} = \frac{0{,}06 \cdot 0{,}1}{0{,}3} = 0{,}02$$

Offensichtlich sind die Karrierechancen mit einem Haustier in der Kindheit nur gering besser (13,4%) als ohne ein solches (2%).