Kapitel 2

Aufgabe 2.1

Sie möchten Ihrer Schwester etwas zum Geburtstag schenken. Auf der Suche nach etwas Passendem finden Sie bei einem Schaufensterbummel folgende Dinge, die Ihrer Schwester mit Sicherheit Freude machen würden:

- Ein Teddybär (15 €),
- das Buch „Töchter des Grauens“ (12,80 €),
- eine Flasche Champagner (32 €).

Bei diesem Stand der Dinge beschließen Sie, die Suche einzustellen. Sie wollen nicht mehr als 50 € ausgeben und ziehen auch in Erwägung, Ihrer Schwester statt Sachgütern einen nagelneuen 50-€-Schein in Geschenkpapier zu überreichen.
Wieviele Alternativen haben Sie?

Lösung 2.1

- Teddy	- Buch	- Flasche	- € 50,--
- 2 Teddies	- 2 Bücher	- Flasche + Teddy	
- 3 Teddies	- 3 Bücher	- Flasche + Buch	
- 2 Teddies + Buch	- 2 Bücher + Teddy	- Teddy + Buch	

Es gibt 13 Alternativen. Es ist aber zu fragen, ob die Alternativen mit gleicher Geschenkart wirklich sinnvoll sind.

Aufgabe 2.2

In der Zeitung lesen Sie, daß ein arbeitsloser Bewohner von Gammelsdorf im Lotto gewonnen hat. Sie machen sich Hoffnung, daß es sich dabei um Ihren mißratenen Vetter Kalle handeln könnte, der aus Gammelsdorf stammt und dort wohnt. Gammelsdorfs Bevölkerung hat einen Anteil von 30% Ausländern und eine Arbeitslosenquote von 8%. Unter den Ausländern ist die Arbeitslosenquote 15%. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß der glückliche Gewinner ein Inländer ist?

Lösung 2.2

Gesucht: Da die Anzahl der Einwohner von Gammelsdorf nicht gegeben ist, wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß der glückliche Gewinner ein Inländer ist.

Formal: p(Inländer|arbeitslos)?

Gegeben:
p (Ausländer) = 0,3
p (arbeitslos) = 0,08
p (arbeitslos|Ausländer) = 0,15

Lösung: mit Inländer = ¬ Ausländer

1. p(¬Ausländer|arbeitslos) = 1 – p(Ausländer|arbeitslos)

2. p(Ausländer|arbeitslos) = p(arbeitslos, Ausländer) / p(arbeitslos)

3. p(arbeitslos, Ausländer) = p(Ausländer) · p(arbeitslos|Ausländer)
= 0,3 · 0,15 = 0,045

3. in 2. p(Ausländer|arbeitslos) = 0,045 / 0,08

in 1. 1 – 0,045 / 0,08 = 0,437 = 43,7%

Aufgabe 2.3

Sie überlegen, ob Sie Ihre neue Lederjacke anziehen, wenn Sie ins Fitness-Studio gehen. Sie würden sie gern Ihrer Freundin zeigen, die Sie möglicherweise dort treffen werden. In letzter Zeit sind im Umkleideraum häufig Wertgegenstände abhanden gekommen. Es besteht die Möglichkeit, daß Ihnen während des Trainings die Jacke gestohlen wird.

(a) Welche Szenarien sind für Ihr Entscheidungsproblem relevant?

(b) Die Wahrscheinlichkeit, Ihre Freundin im Studio zu treffen, beziffern Sie mit 60%, die Wahrscheinlichkeit, daß Ihre Jacke gestohlen wird, mit 10%. Welche Wahrscheinlichkeiten geben Sie den unter (a) identifizierten Szenarien?

Lösung 2.3

(a) Gesucht: Welche Umweltzustände gibt es?
Formale Bezeichnung: (¬ kennzeichnet das komplementäre Ereignis).

S_1: Freundin da
$\neg S_1$: Freundin nicht da
S_2: Jacke gestohlen
$\neg S_2$: Jacke nicht gestohlen

Relevante Szenarien: (S_1, S_2); $(\neg S_1, \neg S_2)$; $(\neg S_1, S_2)$; $(S_1, \neg S_2)$

(b) Gesucht: Gesucht sind die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten der relevanten Szenarien, unter der Annahme, daß S_1 und S_2 stochastisch unabhängig sind!

$p(S_1, S_2) = p(S_1) \cdot p(S_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06$
$p(S_1, \neg S_2) = p(S_1) \cdot p(\neg S_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}54$
$p(\neg S_1, S_2) = 0{,}04$
$p(\neg S_1, \neg S_2) = 0{,}36$

Aufgabe 2.4

Betrachtet werden zwei Ereignisse x und y. Gegeben sind die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten $p(x, y) = 0{,}12$, $p(x, \neg y) = 0{,}29$ und die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(y|\neg x) = 0{,}90$.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $p(\neg x, \neg y)$, $p(\neg x, y)$, $p(x)$, $p(y)$, $p(\neg x)$, $p(\neg y)$, $p(x|y)$, $p(y|x)$.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p(x \text{ oder } y)$ (die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens eines der beiden Ereignisse auftritt)?

Lösung 2.4

(a) Die Angaben aus der Aufgabenstellung in folgende Matrix eintragen. Diese dann vervollständigen.

Matrix der Randwerte und gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten:

* = gegeben

	x	¬x	Σ	
y	0,12 *	0,531	0,651	p(y)
¬y	0,29 *	0,059	0,349	p(¬y)
Σ	0,41	0,59	1	
	p(x)	p(¬x) = 1– p(x)		

Rechenschritte zur Vervollständigung der Matrix:

p(x)	= p(x,y) + p(x,¬y)	= 0,12 + 0,29	= 0,41
p(¬x)	= 1 – p(x)	= 1 – 0,41	= 0,59

Die fehlenden Wahrscheinlichkeiten müssen mit der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnet werden.

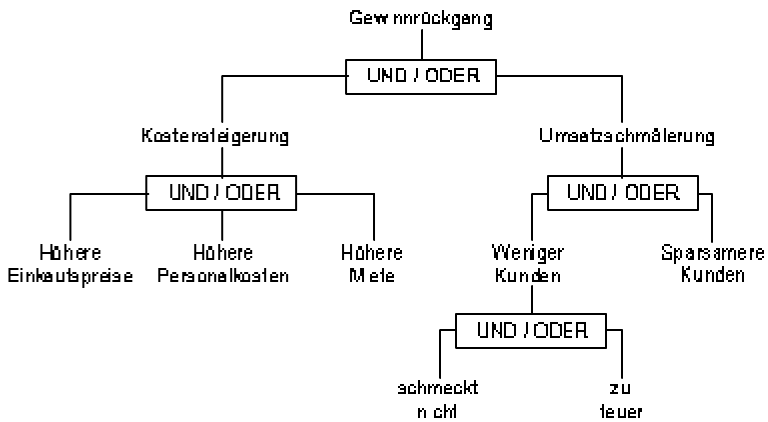
p(¬x,y)	= p(¬x) · p(y|¬x)	= 0,59 · 0,90	= 0,531
p(¬x,¬y)	= p(¬x) – p(¬x,y)	= 0,59 – 0,531	= 0,059
p(y)	= p(x,y) + p(¬x,y)	= 0,12 + 0,531	= 0,651
p(¬y)	= 1 – p(y)	= 1 – 0,651	= 0,349
p(x|y)	= p(x,y) / p(y)	= 0,12 / 0,651	= 0,184
p(y|x)	= p(x,y) / p(x)	= 0,12 / 0,41	= 0,293
p(x|¬y)	= p(x,¬y) / p(¬y)	= 0,29 / 0,349	= 0,831

(b) $p(x \text{ oder } y) = p(x) + p(y) - p(x, y) = 0{,}41 + 0{,}651 - 0{,}12 = 0{,}941$

Aufgabe 2.5

Ihr Schwager Calle Noni betreibt ein italienisches Restaurant. In letzter Zeit klagt er, daß er immer weniger Gewinn übrig habe. Da Sie Betriebswirtschaftslehre studieren, fragt er, ob Sie ihn nicht einmal beraten können. Sie wissen wenig über das Restaurant und nehmen sich vor, Calle zu besuchen und soviel relevante Information wie möglich zu erfahren. Zur Vorbereitung auf diesen Besuch zeichnen Sie einen Ursachenbaum, in dem Sie alle denkbaren Ursachen für den Gewinnrückgang eintragen.

Lösung 2.5



Aufgabe 2.6

Der Inhaber eines Ausflugsrestaurants überlegt am Freitagmorgen, wie viele Torten er für den Sonntag bestellen soll. Für den Fall, daß die Fußball-Nationalmannschaft in das Finale kommt, rechnet er mit so geringem Besuch, daß nur zwei Torten verkauft werden. Scheitert die Nationalmannschaft Freitag nachmittag im Halbfinale, rechnet der Wirt mit 20 Torten Absatz. Der Einkaufspreis einer Torte beträgt 10 €, der Erlös 30 €. Der Inhaber will nur zwischen den Alternativen „Zwei Torten", „Fünf Torten" und „Zehn Torten" wählen. Sein Ziel ist Gewinnmaximierung. Stellen Sie eine Entscheidungsmatrix auf.

Lösung 2.6

Herstellung von	Nationalmannschaft im Finale max. 2 Torten	Nationalmannschaft nicht im Finale max. 20 Torten
2 Torten	$2 \cdot 30 - 2 \cdot 10 = 40$	$2 \cdot 30 - 2 \cdot 10 = 40$
5 Torten	$2 \cdot 30 - 5 \cdot 10 = 10$	$5 \cdot 30 - 5 \cdot 10 = 100$
10 Torten	$2 \cdot 30 - 10 \cdot 10 = -40$	$10 \cdot 30 - 10 \cdot 10 = 200$

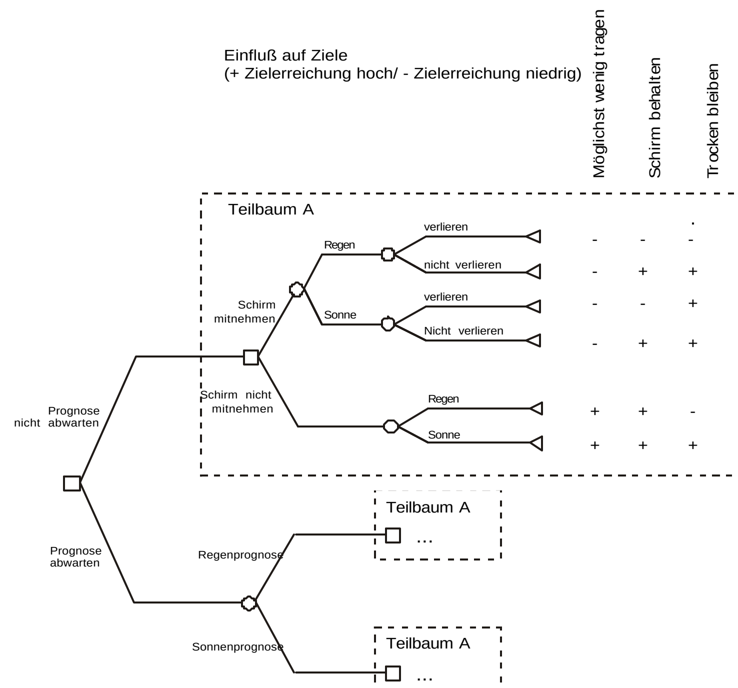
Aufgabe 2.7

Sie wollen einen Stadtbummel machen und überlegen sich, ob Sie einen Regenschirm mitnehmen oder nicht. Falls es regnet und Sie keinen Regenschirm haben, müssen Sie Ihre Kleidung in die Reinigung geben. Andererseits hassen Sie es, einen Schirm zu tragen, und vergessen Schirme häufig in einem Laden. Da gleich im Radio die Wettervorhersage ansteht, überlegen Sie sich, ob Sie noch die Wetterprognose abwarten sollen.

(a) Strukturieren Sie das Problem durch die Aufstellung eines Entscheidungsbaums. Kennzeichnen Sie darin die Alternativen, die Ereignisse und die Konsequenzen.

(b) Ist auch eine Darstellung des Problems in einer Entscheidungsmatrix möglich?

Lösung 2.7 a) Entscheidungsbaum



b) Darstellung des Problems in einer Entscheidungsmatrix

Strategien:

S_1: Prognose abwarten
- bei Regenprognose: Schirm mitnehmen
- bei Trockenprognose: Schirm mitnehmen

S_2: Prognose abwarten
- bei Regenprognose: Schirm nicht mitnehmen
- bei Trockenprognose: Schirm mitnehmen

S_3: Prognose abwarten
- bei Regenprognose: Schirm mitnehmen
- bei Trockenprognose: Schirm nicht mitnehmen

S_4: Prognose abwarten
- bei Regenprognose: Schirm nicht mitnehmen
- bei Trockenprognose: Schirm nicht mitnehmen

S_5: Prognose nicht abwarten
- Schirm mitnehmen

S_6: Prognose nicht abwarten
- Schirm nicht mitnehmen

Szenarien:

Sz_1: Prognose: Regen
Regen
verlieren

Sz_2: Prognose: Regen
Kein Regen
verlieren

Sz_3: Prognose: Regen
Regen
nicht verlieren

Sz_4: Prognose: Regen
Kein Regen
nicht verlieren

Sz_5: Prognose: Kein Regen
Regen
verlieren

Sz_6: Prognose: Kein Regen
Kein Regen
verlieren

Sz_7: Prognose: Kein Regen
Kein Regen
nicht verlieren

Sz_8: Prognose: Kein Regen
Regen
nicht verlieren

Insgesamt $2^3 = 8$ Szenarien.

Entscheidungsmatrix:

	Sz_1	...	Sz_8
S_1	tragen, weg, trocken	...	...
S_2	nicht tragen, zu Hause, Reinigung	...	...
...	...	...	...
S_6	...	...	...

Eine Darstellung als Entscheidungsmatrix ist möglich, aber sehr aufwendig, da die Matrix $6 \cdot 8 = 48$ Felder hat.

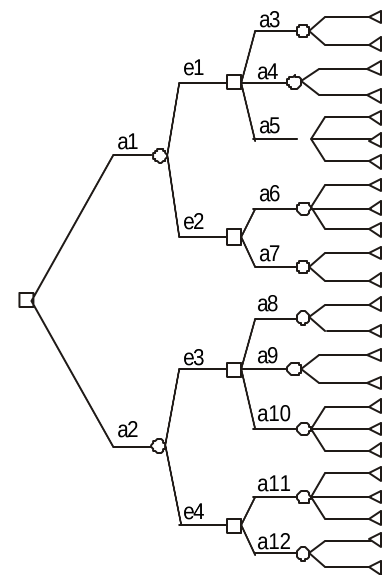
Aufgabe 2.8

(a) Wieviele mögliche Strategien enthält der abgebildete Entscheidungsbaum?

(b) Kennzeichnen Sie eine davon und markieren Sie die Konsequenzen, die sie haben kann.

(c) Wieviele Szenarien sind in diesem Entscheidungsbaum enthalten?

(d) Kennzeichnen Sie eines dieser Szenarien, indem Sie alle Ereignisse markieren, die bei diesem Szenario eintreten können.



Lösung 2.8

(a) und (b)

Strategie 1: Wähle a_1, falls e_1 eintritt, wähle a_3.
falls e_2 eintritt, wähle a_6.

Strategie 2: Wähle a_1, falls e_1 eintritt, wähle a_4.
falls e_2 eintritt, wähle a_6.

Strategie 3: Wähle a_1, falls e_1 eintritt, wähle a_5.
falls e_2 eintritt, wähle a_6.

Strategie 4: Wähle a_1, falls e_1 eintritt, wähle a_3.
falls e_2 eintritt, wähle a_7.

Strategie 5: Wähle a_1, falls e_1 eintritt, wähle a_4
falls e_2 eintritt, wähle a_7.
Strategie 6: Wähle a_1, falls e_1 eintritt, wähle a_5
falls e_2 eintritt, wähle a_7.

6 Strategien ausgehend von der Wahl a_1. Analog 6 Strategien ausgehend von der Wahl a_2. Es gibt also insgesamt 12 Strategien.

(c) und (d)

Analoges Vorgehen zu (a), es werden die "Strategien der Umwelt" betrachtet.

Szenario 1:

a_1 6 e_1
a_2 6 e_3
a_3 6 Oberer Ast
a_4 6 "
a_5 6 "
a_8 6 "
a_9 6 "
a_{10} 6 " Szenario 2, ..., 324 analog.

Berechnung der relevanten Szenarien:

Mögliche Teilszenarien unter Ast a_1:	für e_1:	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
	für e_2:	$3 \cdot 2 = 6$
Mögliche Teilszenarien unter Ast a_2:	für e_3:	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
	für e_4:	$3 \cdot 2 = 6$

Zur Berechnung der Gesamtszenarien werden beide Äste (a_1 und a_2) berücksichtigt, also alle möglichen Kombinationen der jeweiligen Teilszenarien:

e_1 und e_3	$= 12 \cdot 12$	$= 144$
e_2 und e_3	$= 6 \cdot 12$	$= 72$
e_1 und e_4	$= 12 \cdot 6$	$= 72$
e_2 und e_4	$= 6 \cdot 6$	$= \underline{36}$
		$= 324$ Szenarien

Aufgabe 2.9

Sie überlegen, ob Sie sich mit einem Teil ihrer Millionenerbschaft an einem neu zu errichtenden Sport- und Freizeitzentrum beteiligen wollen. Offenkundig hängt der ökonomische Erfolg eines solchen Unternehmens von vielen Faktoren ab. Stellen Sie diese in einem Einflußdiagramm dar.

Lösung 2.9